기하학개론 강의록

김영욱, 고성은

안암 수학강의록 시리즈
제1권

고려대학교 수학과

기하학개론 강의록

김영욱　고성은

김영욱
고려대학교 수학과
ywkim@korea.ac.kr

고성은
건국대학교 수학과
sekoh@konkuk.ac.kr

Mathematics Subject Classification (2010): 51-01

편집 및 발행: 고려대학교 수학과

발행일: 2020년 1월 (v 0.1)

이 책은 TeX과 Oblivoir 클래스를 사용해 조판하였다. 글꼴은 TeX Gyre Pagella, TeX Gyre Heros, Source Han Serif 및 Noto Sans를 사용하였다.

사랑하는 아내 혜문에게

– 김영욱

사랑하는 아내 정선에게

– 고성은

머릿말

안암 수학강의록 시리즈 1권으로의 발간에 부쳐

안암 수학강의록 시리즈는 고려대학교 수학과의 구성원들이 오랫동안 생각하고 있던 아이디어인데 드디어 그 첫걸음을 내딛게 되었습니다. 제 1권으로 본 기하학개론이 선정된 것은 우연히 때를 맞춰 준비가 되었기 때문이며 다른 이유는 없습니다. 바라기는 고려대학교에서의 강의만이 아니라 국내외 모든 대학의 좋은 강의내용들이 이 강의록 시리즈에 실리게 되기를 기대합니다.

이 강의록이 어떻게 시작되었고 어떤 목적을 가지고 쓰여졌는가는 2008년도의 머릿말을 보시기 바랍니다. 여기서는 2008년도 판과 비교해서 달라진 점을 중심으로 설명합니다.

처음 이 강의록을 기획할 때는 이미 이야기한 바와 같이 Jennings의 기하학 개론 교과서를 많이 참조했습니다. 물론 지금도 대부분 그대로이지만 처음에는 각 장의 순서도 비슷해서 평면기하, 구면기하, 사영기하를 공부하고 그 다음에 쌍곡기하를 공부하는 순서였습니다. 이것은 Jennings의 기하학 개론의 마지막 장인 특수상대성이론을 쌍곡기하로 바꾼 것이었습니다. 그러나 사영기하는 나머지 세 장의 내용과는 조금 다른 기하학처럼 보이기 때문에 난이도를 고려한 이 순서는 내용의 관점에서는 조금 이상합니다. 이번 안암 수학강의록 시리즈로 출간하면서

이 순서를 내용에 더 맞는 순서로 바꿨습니다.

한편 평면기하의 부분의 내용 처음에는 기하학 공부의 바탕이 되는 선형대수 내용이 들어있었습니다. 물론 이것도 선형기하이기는 하지만 다른 장과의 균형을 생각해서 책의 맨 마지막의 부록 부분으로 옮겼습니다. 이와 함께 선형대수의 두 축인 1차함수(선형변환)과 2차함수(2차형식)의 구조를 설명하는 두 이론, 특이분해(Singular Value Decomposition; SVD)와 고유분해(Spectral Decomposition)을 형평성 있게 소개하는 것이 좋겠다고 생각해서 부록에 특이분해에 대한 설명을 추가했습니다. 단지 특이분해는 고유분해 방법을 사용해야 하기때문에 2차형식 이론을 먼저 넣고 그 다음에 넣었습니다.

구면의 기하는 공부하기가 비교적 수월하면서도 수학 전반에서 매우 중요한 예로 등장합니다. 그래서 구면과 관련된 기하학과 대수학적 계산법들을 조금 자세히 공부하는 것이 매우 도움될 것이라고 보입니다. 이를 반영하여 2차원 구면의 기본 이론 외에 2차원 및 3차원 구면을 계산하는 계산법을 추가하였습니다. 3차원 구면의 설명 대부분은 근래에 이에 대해 설명한 유명한 몇 개의 강의록을 그대로 또는 번역/요약하여 수록하였습니다. 기본적으로는 3차원 구면의 위상기하학적 형태와 호프Hopf가 잘 설명해준 기하학적 구조를 설명함과 동시에 3차원 유클리드 공간의 기하 및 물리학 관련 계산을 매우 쉽게 해 주는 해밀턴의 사원수 계산법을 넣었습니다. 사원수는 3차원 유클리드 공간의 계산은 물론 3차원 구면의 계산에도 매우 유용해서 호프의 이론을 공부해 보면 이것이 매우 유용한 계산법이라는 것을 알 수 있습니다.

이 책의 내용을 간단히 정리하면 다음과 같습니다. 우선 2008년도의 기본적 목표를 다시 언급하면 유클리드 및 비유클리드 기하학의 기본 모형인 평면, 구면 및 쌍곡평면 위의 기본적 기하학 도구인 거리(길이), 넓이, 직선(geodesic) 그리고 세 점 사이의 거리의 계산도구인 코사인법칙을 공부합니다. 이 밖에 3차원 구면의 내용은 앞절에서 설명한 바와 같습니다. 마지막 장을 이루는 사영평면의 이론은 어째서 동차좌표를 사용하는 것이 편리한가를 설명한 다음 한 두 가지 중요한 정리를 좌표를 써서 알아보고 이를 바탕으로 사영공간에서 계산을 써서 기하를 할 수 있게 해 주는 불변량인 복비cross ratio의 개념을 봅니다. 거리를 정의할 수 없는

사영공간에서 거리 대신 쓸 수 있는 개념이 복비입니다. 마지막으로 사영기하를 통해서 배울 수 있는 큰그림을 그리는 방법인 쌍대성을 알아봅니다.

그리고 이 기회를 빌어 본 저자들이 참여한 기하학 연구팀의 나머지 구성원들(신해용, 양성덕, 이형용)께 심심한 감사를 표합니다. 기하학에 관해 함께 공부하고 연구하고 토론하면서 보낸 지난 십수 년은 정말 즐거운 시간이었습니다.

김영욱, 고성은

2020년 1월

옛 머릿말

고려대학교에서 기하학개론 강의를 하면서 몇 가지 책을 교과서로 사용해 보았다. 그 중에는 Greenberg, Stillwell, Jennings가 있고 이 밖에도 사영기하 교과서와 Berger 같은 참고도서도 몇 있었다. 이들 모두 훌륭한 책이지만 우리 실정에 조금 맞지 않는 점이 있었다. 고등학교 기하학에서 다루는 내용이 점점 적어지게 됨에 따라 학생들은 일반적인 대학 기하학 교과서를 너무 어렵고 딱딱하게 느끼는 것 같다.

오랫동안 기하학개론의 단골 메뉴는 사영기하학이었다. 사영기하학은 현대 수학 공부를 시작하는 전환점에 배우기에 아주 적합한 주제이다. 가장 구체적인 기하학이면서도 추상성과 쌍대성 같은 수학의 구조 부분을 또 가장 쉽게 보여주는 과목이며, 기하와 대수학을 잘 섞어서 학문 분야의 융합 또한 정말 잘 보여준다. serious하게 접근하면 너무 어려울 수 있는 군(groups)의 이론이라든가 쌍대성(duality)의 이론, 그리고 추상기하학의 이론과 같은 것을 쉽게 예를 통하여 보여주는 장점을 두루 갖추고 있다.

나도 한 두해 사영기하학을 기하학개론 수업에서 강의해 보았다. 이런 많은 장점에도 불구하고 고전 사영기하학은 학부의 다른 과목들과 너무 동떨어진 느낌을 받았다. 이 내용을 잘 이해하는 것이 현대수학에 첫걸음을 잘 딛게 해 주는 것임에는 틀림 없지만, 그리고 공리론적인 접근과 수학이론의 존재성 등의 철학적

문제는 학부 수학 다른 어떤 곳에서도 다루기 힘든 것이지만 (한번은 꼭 생각해야 하는 문제임에 틀림 없다.) 이런 문제에 너무 치우치다 보면 다른 과목의 공부에 직접적인 도움이 덜 되는 것도 사실이다.

Smirnov의 대학 교과서 시리즈를 보며 느끼는 것은 학부 수학을 가르치되 한 과목 한 과목이 따로 따로가 아니라 이 모든 과목이 하나의 이론에서 부분 부분을 이야기하고 있는 것이라고 할 수 있어야 한다는 것이고, 이 모든 것에서 구조와 형식을 강조하는 Bourbaki의 생각은 꼭 필요한 것이지만 이것을 초장에 학생들에게 강조할 필요는 없다고 생각하고 보면, 아마도 학부에서 학생들이 잘 배워냈으면 하는 것은 다음과 같은 것이 아닐까 한다.

21세기를 들어선 마당에 우리에게 필요한 것은 현대사회를 살아가면서 활용도 높은 이론을 배워야 할 것이다. 이것은 단순히 많이 사용되는 계산법을 의미하는 것은 아니다. 아마도 가장 많이 사용되는 것은 중 고등학교 수학들일 것이다. 그러나 우리가 바라는 활용도는 어느 누구나 맞닥뜨렸을 때에 손쉽게 해결할 수 있는 문제에 대한 활용도가 아니다. 이런 활용도는 아무리 자주 있어도 활용도가 높다고 할 수는 없다. 오히려 자주 마주치지 않아도 한 번 마주쳤을 때 보통 사람들은 해결할 줄 모르고 수학과 학생들과 같은 고급 수학 사고를 단련한 사람들만이 해결할 수 있는 문제에 활용가능한 것이 진짜로 높은 활용도를 가지고 있다고 할 수 있다.

이런 관점에서 보면 단순히 공식을 외우고 풀이법을 가진 내용을 공부하는 것도 중요하겠지만 오히려 이런 수학들을 전체적으로 아우르고 이들의 관계를 보면서 고정된 관념으로는 보기 힘든 것을 찾아낼 수 있는 것이 중요하다고 생각된다.

학부 수준에서 이러한 것은 무엇이 있는가? 당연히 학부의 모든 과목이 이런 것이지만 전체적으로 아우르는 한 가지 관점을 뽑아보라면 역시 미적분의 계산이다. 물론 최대, 최소 문제와 같은 단순한 계산문제를 뜻하는 것은 아니다. 이런 것이 잘 적용되지 않을 때 문제를 해결할 수 있는 단서를 찾아내고, 정확한 계산이 불가능할 때에도 개략적인 수치적 단서나 또는 연속성과 같은 성질을 통하여 구하는 답의 정성적 성질을 찾아내는 것 등은 고급 미적분학, 즉, 해석학이다.

특히 이런 문제를 다루려면 일반적인 함수의 성질을 잘 파악하고 있어야 하고,

구체적인 계산과 연계시키려면 적어도 1차함수와 2차함수를 잘 다룰줄 알아야 한다. 따라서 학부 해석학과 선형대수학을 잘 이해하고 활용할 수 있게 만들면 더 바랄 나위가 없겠다.

이런 관점에서 볼 때 학부 2학년에서 공부하는 해석학과 선형대수학에 도움이 되는 과목이 되는 것이 수학과 학부에 들어와서 처음 공부하는 기하학개론의 한 가지 목표가 되어야 할 것이다. 이런 목표에 도움이 되도록 하려고 생각한 것은, 비록 고전기하학의 강의지만 그 내용을 되도록 미적분학에 맞추고, 공리와 논리가 가장 선명한 기하학이지만 이보다는 계산과 해석학적 성질에 초점을 맞추며, 군의 구조가 잘 들어나는 이론임에도 구체적인 표현의 계산적 성질을 들여다 봄으로써 계속되는 수학 공부에 직접 연계되고, 미적분학, 행렬론 등에서 공부한 내용들을 구체적인 기하에 활용해봄으로써 이 계산법을 더 확고하게 익힐 수 있도록 방향을 잡는 것이다.

이 강의록은 전반적으로 유클리드와 비유클리드 기하학의 초보적 내용만을 다룬다. 특히 기하학의 깊이있는 이해를 목표로 하기 보다는 각 기하학의 유사성과 이에 관련된 계산법의 유사성을 보는 데에 중점을 두었으며 기하학적인 증명법보다는 미적분과 해석기하를 통한 증명을 하려고 노력하였다. 특히 학부 1학년의 미적분학과 약간의 행렬, 벡터만을 사용해서 우리가 해볼 수 있는 모든 것을 기하학을 통해서 해 보려 하고 있다고 생각하면 접근하기 쉬울 것이다.

이 강의록의 내용은 유클리드 기하, 구면 기하, 사영 기하, 그리고 쌍곡 기하로 되어 있다. 시간이 있으면 로렌츠-민코프스키 공간의 기하를 덧붙였으면 한다.[1)] 이 각각의 기하에서 우리가 중요하게 보려고 하는 것에는 길이, 거리, 넓이(부피)의 개념과 이의 계산법과의 관계, 각 기하에서의 직선의 개념과 이와 관련된 계산, 각 기하의 특징을 잘 보여주는 한 두 가지 공식 (특히 cosine법칙), 클라인의 관점에서 이 기하를 특징지워주는 소위 동형사상군의 표현과 계산, 그리고 이들 기하에서 공통적으로 잘 사용되는 좌표계의 계산 정도를 들 수 있다.

이 강의록은 미적분을 통한 접근에서 자칫 잘못하면 미분기하로 빠질수 있는 점을 방지하느라고 노력하였다. 미분기하적 관점 자체를 무시할 수는 없지만 우

1) 쌍곡기하의 장에 로렌츠-민코프스키 공간의 이론이 살짝 들어 있다.

리는 미분을 사용함에도 그리고 isometry를 다룸에도 최대한 순수한 미적분학의 계산과 초등적인 기하학적 직관만을 사용하려고 노력하였으며 계산이 복잡하더라도 곡률의 개념을 도입하지 않았다. 따라서 우리가 다루는 내용도 이것이 가능한 부분에 국한하였다. 물론 계산 중에는 implicit하게 곡률 계산이 들어 있는 부분이 있더라도 1학년 학생들의 수준에서 쉽게 따라갈 수 있는 계산의 과정에서 보이는 부분 정도이며 의도적으로 곡률을 사용하지는 않았다.

우리에게 필요한 계산법 가운데 선형대수 부분을 앞부분에서 간략하게 다루었다. 여기서도 선형대수의 eigenvalue와 같은 것을 언급하였지만 기본되는 문제에서 자연스럽게 나타나는 정도와 한 두 가지 아이디어의 사용만으로 이해되는 정도를 넘지 않았다. 특히 고등학교 수준의 행렬 계산에서 이 몇 가지 아이디어를 따라 계산해 보는 수준으로 설명하였으므로 너무 깊은 이론을 강요한다고 생각하지는 않는다.

역시 이 기하학 강의록은 그 동안 가장 여러번 교재로 사용했던 Jennings의 교과서를 많이 따랐다. 어쩔 수 없이 가장 쉽고 가장 계산적이면서도 그 계산 속의 기하학적 아이디어를 비교적 잘 보여주는 교과서였기 때문이다. 이 교과서에서 조그만 문제점이라면 쌍곡기하에 대한 언급이 없다는 것이다. 이 강의록을 작성하면서 쌍곡기하를 미분기하 없이 계산하는 것이 쉽지 않다는 것을 다시 확인하였지만 그래도 조금은 아쉽다. 몇 가지 증명은 더 낫거나 기초적인 방법으로 바꾸려고 노력하였으나 미흡하다. 그림을 더 많이 넣어야 하는데 시간 부족으로 아직 많은 부분에 추가하지 못하였다. 이 강의록을 쓰는 데 참조한 문헌들은 강의록 마지막 부분에 적어 두었다.

시간에 쫓겨서 강의록을 만드는데 일부 그림을 그려주고 잘라 붙이는 작업을 도와준 홍영준군에게 고마움을 표한다.

김영욱

2008년 여름

안암동 애기능 캠퍼스에서

차 례

제 1 장

유클리드 공간의 기하

1.1 넓이와 행렬식

이 절의 목표

1. 단위 정사각형의 넓이가 1이고, 영역을 두 부분으로 나누었을 때 각각의 영역의 넓이의 합이 전체 영역의 넓이라는 성질만을 가지고 평면에서의 넓이를 정의할 수 있음을 알아본다. 특히 이 성질은 평면의 벡터에 대한 행렬식을 정의하는 성질과 동일한 것임을 알아본다.

   이로부터 평행사변형의 넓이가 왜 행렬식의 값으로 표현되는가를 이해한다.

2. 삼각형의 넓이공식을 일반화하여 다각형의 넓이 공식과 미적분학에서 선적분에 의한 공식을 유도할 수 있다.

3. $\mathbb{R}^3$ 의 평행육면체의 넓이가 꼭지점의 행렬식으로 표현됨을 증명한다.

4. $\mathbb{R}^3$ 의 평행사변형의 넓이가 두 변의 외적의 크기로 표현됨을 알아본다.

들어가기

고등학교 때 그리고 대학 1학년에서 행렬식에 대하여 공부하였다. 모두들 행렬식을 어떻게 계산하는지는 잘 알고 있다. 그리고 크기가 같은 정사각행렬 A, B가 있으면 그 곱의 행렬식이

$$|AB| = |A|\,|B|$$

를 만족시킨다는 것을 알고 있는 사람도 많이 있다. 그렇지만 행렬식이란 무엇인가 하고 물으면 답하기가 쉽지 않다.

이 절에서는 초등학교로 돌아가서 우리가 넓이를 공부하였던 때를 돌아보고 넓이를 공부하던 과정이 행렬식을 공부하는 과정과 닮았다는 것을 알아보려고 한다. 이것을 알고 나면 행렬식이란 다각형/다면체의 넓이, 또는 일반적으로 넓이를 계산하는 방법이라는 것을 금방 알아볼 수 있다. 또 우리가 여기저기서 보는 많은 넓이와 부피 공식들이 행렬식을 가지고 나타내어진다는 것을 알 수 있다.

행렬식을 정의하는 방법은 몇 가지 있다. 여기서는 행렬을 공부할 때 잘 사용하는 한 가지 방법으로 2×2-행렬의 행렬식을 정의하는 것을 보자. 이 때, 2×2-행렬의 경우만 보면 일반적인 차원에서는 어떻게 하는 것인지도 바로 알 수 있다.

1.1.1 행렬식의 정의

보통 2×2 행렬의 행렬식

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

은 수학 계산의 여러 곳에 나타난다. 이러한 계산 경험만으로도 이 값이 중요하다는 것을 알 수 있지만 이 값은 무엇일까? 여러 곳에서 여러 맥락으로 나타나는 $ad - bc$이지만, 우리는 평행사변형의 넓이라는 관점에서 보려고 한다. 즉, 위의 행렬식의 절대값 $|ad - bc|$는 두 벡터 (a, b)와 (c, d)를 두 변으로 갖는 평행사변형의 넓이와 같다.

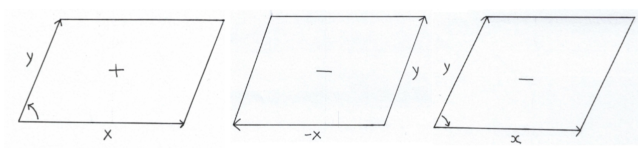
정리 1.1.1. (a, b)와 (c, d)를 두 변으로 갖는 평행사변형의 넓이는 $|ad - bc|$이다.

이 정리는 초등기하를 사용하여 확인할 수 있다.

문제 $a > c > 0, d > b > 0$ 일 때 위의 정리가 성립함을 도형을 사용하여 증명하여라.

그러나 여기서는 조금 색다른 방법을 써서 알아보려고 한다. 우선 두 벡터 $\mathbf{x} = (a, b)$와 $\mathbf{y} = (c, d)$를 두 변으로 하는 평행사변형의 넓이는 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$의 함수이다.

여기서 평행사변형의 넓이는 양수이다. 그러나 우리는 조금 다르게 생각하려고 한다. 마치 정적분을 계산하던 것처럼 하자.

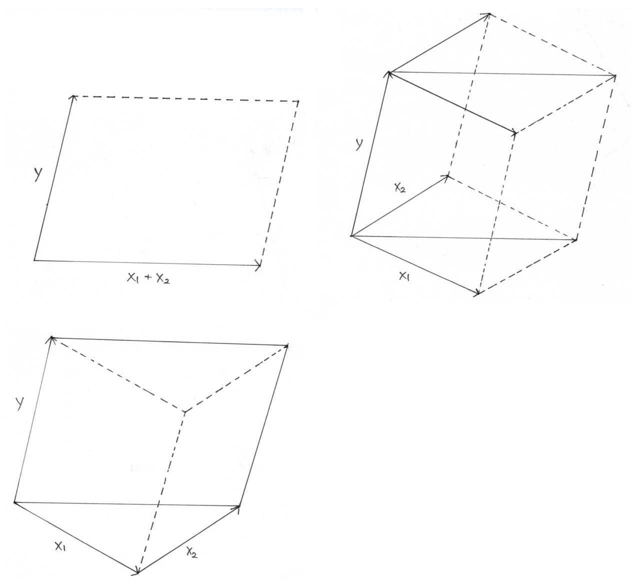


두 벡터 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$가 만드는 평행사변형의 넓이와 두 벡터 $-\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$가 만드는 병행사변형의 넓이가 똑같지만 $\mathbf{x}$의 방향에 따라 하나는 양수 또 하나는 음수로 서로 부호가

달라진다고 하려고 한다. 조금 더 정확하게 두 벡터 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$가 있을 때 $\mathbf{x}$에서 $\mathbf{y}$를 바라보는 방향이 시계 반대방향이면 넓이가 양수가 되고, 반대로 시계방향이면 넓이가 음수가 되기로 하면, 이제 이 넓이함수는 음수값도 갖는 부호를 갖는(signed) 넓이함수가 된다. 이 함수를 $A(\mathbf{x},\mathbf{y})$라고 하자.

도움정리 1.1.2. $A(\mathbf{x},\mathbf{y})$는 $\mathbf{x}$의 *1*차함수이고, 또한 $\mathbf{y}$의 *1*차함수이다.

(증명) $\mathbf{y}$가 고정된 벡터이고 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$라 하자. 우리가 비교하려는 것은 $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y})$와 $A(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}) + A(\mathbf{x}_2,\mathbf{y})$이다. 이 둘이 일치함은 다음 그림에서 명백하다.



한편 $A(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y})$와 $\alpha A(\mathbf{x},\mathbf{y})$가 같은 값을 가진다는 것도 명백하다.(확인하여 보아라.) ■

도움정리 1.1.3. $A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -A(\mathbf{y},\mathbf{x})$가 성립한다.

이는 넓이에 부호를 주는 방식에서 명백하다. 그리고 너무도 당연하게 다음이 성립한다.

도움정리 1.1.4. $\mathbf{x} = (1, 0)$이고 $\mathbf{y} = (0, 1)$일 때, $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$ 이다.

이제 이 세 가지 사실을 가지고 $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$를 계산하여 보자. 우선 다음 사실이 성립함을 보이자.

따름정리 1.1.5. *1.* 모든 $\mathbf{x}$에 대하여 $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ 이다.

2. 모든 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$에 대하여 $A(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}, \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 이다.

(증명) $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$에서 두 변수의 순서를 바꾸면 부호가 바뀐다. 따라서

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

이다. 그러므로 $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ 이다. 한편,

$$A(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}, \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + A(\alpha\mathbf{y}, \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha A(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

이다. ■

정리의 증명. 편의를 위하여

$$A((a, b), (c, d)) = A\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

로 나타내기로 하자. $a \neq 0$이라 하면

$$A\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d - \frac{bc}{a} \end{pmatrix}$$

이다. 여기서 $d - \frac{bc}{a} = 0$ 이면 $ad - bc = 0$ 이 되어 위의 함수의 값은 $ad - bc$와 일치한다. 만일 $d - \frac{bc}{a} \neq 0$ 이면 위의 함수값은

$$A\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{pmatrix} = a\left(d - \frac{bc}{a}\right) A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ad - bc$$

가 된다. 이제 $a = 0$인 경우를 생각해 보자. 관계식

$$A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

는 $a \neq 0$일 때 성립한다. 그리고 직관적으로 이 식의 양변은 a에 대하여 연속함수이다. 따라서 이 식은 $a = 0$ 일 때도 성립하여야 한다. ■

이 정리의 증명을 보면 평행사변형의 넓이가 $ad - bc$임을 보이는 데 단지 위의 세 도움정리의 공식만을 사용하고 있다. 이 사실은 부호를 갖는 넓이가 이 세 개의 조건만으로 완전히 정하여진다는 것을 이야기하고 있다. 즉, 2×2 행렬의 행렬식은 이 두 행벡터가 만드는 평행사변형의 부호를 감안한 넓이라고 정의하여도 되며 이를 계산하는 공식들은 넓이가 가지는 가장 기본되는 세 개의 공식에서부터 자연스럽게 유도된다는 것이다.

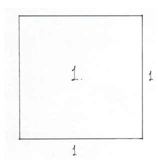
1.1.2 넓이란 무엇인가?

이제 초등학교 때 넓이를 어떻게 배웠었는지 기억하여 보자.

보통 초등학생들은 넓이를 배울 때 사각형의 넓이, 삼각형과 평행사변형의 넓이, 그리고 일반적인 다각형 영역의 넓이 순으로 공부한다. 중학교에서는 원의 넓이를 배우고, 고등학교에 가면 적분으로 주어지는 넓이에 대하여 공부한다.

고등학생까지도 넓이는 당연히 있는 것이고 그 넓이를 계산한다고 생각하고 있지만 사실 "왜 넓이가 당연히 있는가?" 하고 물어보면 한 번도 생각해 본 적이 없는 사람들이 많을 것이다. 넓이가 당연히 있다면 넓이를 처음 배우기 시작할 때부터 당연히 있어야 한다. 그리고 넓이를 처음 배울 때의 쉬운 도형에서는 왜 당연한지도 쉬울 것이다. 그러니까 맨 처음으로 돌아가자.

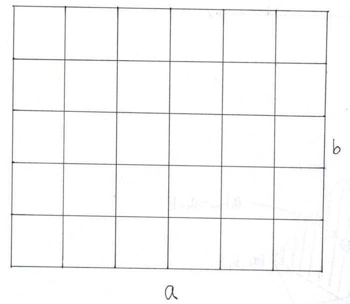
맨 처음에 우리가 넓이를 배울 때는 한 변의 길이가 1인 정사각형을 그려 놓고 이 정사각형의 넓이는 1이다 라고 배웠던 것이 생각날 것이다.



이제 여기서 왜 이 정사각형은 넓이를 가지는가? 그리고 이 정사각형의 넓이는

왜 1인가? 라고 물어보면 어떤 답을 할 수 있는가? 초등학교 선생님의 설명을 되돌려 생각해 보면 한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이는 1이다 라고 했지 그 이유가 있지 않았다. 즉 이것은 정의이지 어떤 (수학적) 이유에서 나온 이야기가 아니다.

그러면 두 변의 길이가 각각 a, b인 직사각형의 넓이는 어떤가? 우선 이 두 변의 길이가 자연수인 경우부터 시작한다. 초등학교에는 다음 그림과 같은 것에서 작은 정사각형의 개수를 세는데서 곱셈을 배우며 동시에 직사각형의 넓이를 배운다.



이제 고등학교를 마친 우리가 보기에 이것 또한 당연한 것이며 금방 수학적 귀납법을 쓰면 증명할 수 있다는 것도 알 수 있다.

문제 두 변의 길이가 자연수인 직사각형의 넓이 공식을 수학적 귀납법을 사용하여 증명하여라.

이제 다 된 것인가? 이 문제를 풀 수 있다면 거의 다 된 것이다. 이 다음은 변의 길이가 유리수 일 때는 어떻게 되는가, 그리고 실수가 되면 어떻게 설명하는가 하는 것이다. 유리수는 분모만큼 더 잘게 나누면 되고, 실수는 유리수에 극한을 사용하면 될 것이다.

문제 직사각형의 한 변의 길이는 자연수이고, 또 한 변의 길이가 유리수일 때 그 넓이 공식을 설명하여라. 또 두 번째 변의 길이가 실수일 때 그 넓이 공식을 설명하여라.

하지만 이 문제를 푸는 데 과연 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이가 1이라는 사실 말고는 쓰는 것이 없는가? 잘 안 느껴지겠지만 당연하게도 다음과 같은 사

실을 사용한다: 두 개의 정사각형을 이어 붙인 도형(직사각형)의 넓이가 각각의 정사각형의 넓이(이 넓이는 1이었다)를 합한 $1+1=2$가 된다는 사실을 사용한다.

아무리 당연해 보여도 이것을 가정하지 않으면 안 된다. (다시 말하면 두 도형을 이어붙인 도형의 넓이가 각각의 도형의 넓이의 합과 같게 되지 않는다면 이런 일을 할 수도 없고 넓이가 우리가 생각하는 그런 넓이가 되지 않을 것이다.) 따라서 이 성질은 넓이의 가장 핵심적인 성질이라고 하지 않을 수 없다. 다시 말하면 도형 D가 두 부분으로 나뉘어져서 $D = D_1 \cup D_2$라고 쓸 수 있고 이 두 부분은 교차하는 부분이 없어서 $D_1 \cap D_2 = \varnothing$일 때, 넓이 A는 다음 성질을 만족시킨다:[1)]

$$A(D) = A(D_1) + A(D_2).$$

초등학교에서 배운 사각형의 넓이를 간추린다면, 가로 세로 각각 1인 정사각형의 넓이를 1이라고 정하고, 두 도형을 겹치지 않게 놓았을 때 이 전체 넓이는 각각의 넓이의 합이라고 하기로 하면, 가로 세로가 각각 자연수 a, b인 직사각형의 넓이는 ab이다. 여기서 두 개의 가정이 매우 중요하다는 사실은 이것을 가정하지 않고는 넓이를 이야기할 수 없기 때문이다.

중요한 사실은 넓이를 정의하는 이 두 조건이 넓이를 정의하기 위하여 부여하는 조건이지 어떤 사실의 당연한 결과는 아니라는 것이다. (즉 우리가 증명할 수 있는 성질의 것이 아니다.) 예를 들어 가로 세로가 각각 1인 정사각형의 넓이가 1이 아니고 4라고 하면 어떻게 되는가? 큰 문제는 없다. 모든 직사각형의 넓이가 원래의 네 배가 될 뿐이다. 이러면 안되는 것 같지만, 가로 세로가 각각 1 inch인 정사각형의 넓이를 우리는 몇 cm^2라고 하는가? 즉 가로 세로가 각각 a, b inch인 직사각형의 넓이는 몇 cm^2인가를 항상 이야기하기로 하면 위와 비슷한 상황이라는 것을 알 수 있다. 이런 것을 하면 안 될 이유는 없다. 즉 위의 조건은 단지 조건이지 꼭 그래야만 하는 것은 아니다. (그래도 이렇게 하는 것이 아니면 매우 불편해서 위의 inch와 cm^2 처럼 하는 일은 절대로 없을 것이겠지만 말이다.) 두 번째 것도 마찬가지이다. 이렇게 하지 않으면 넓이라고 할 수도 없겠지만 이것 또한 넓이를 정하는 조건으로 부여한 것이다. (이것 또한 필수적인 조건이다.)

1) 이것을 넓이 함수의 additivity라고 한다.

이제 직사각형의 넓이가 어떻게 정의되었는지 알면 나머지 도형들의 넓이, 즉, 평행사변형, 삼각형, 다각형 등의 넓이가 어떻게 된 것인지도 알 수 있을 것이다.

자 이제 위의 두 조건을 앞 절의 행렬식을 정의하는 조건들과 비교하여 보자. 행렬식의 두 조건이 이 두 조건과 똑 같은 말이라는 것을 알아볼 수 있겠는가? 이것이 눈에 보인다면 행렬식이란 넓이다 라는 말이 무슨 뜻인지도 알 수 있을 것이다.

1.1.3 다각형의 넓이 공식

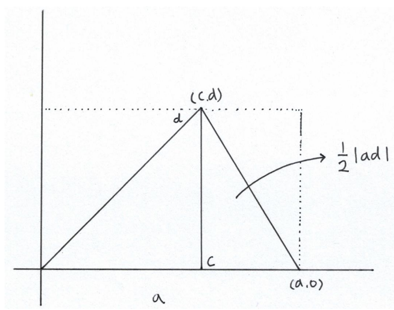
이제 평면의 다각형의 넓이를 알아보자.

삼각형의 넓이 (1)

우선 쉬운 경우로 삼각형의 세 꼭지점 가운데 하나가 원점이고 밑변이 x축 위에 놓인 경우를 살펴보자. 이 삼각형의 다른 두 꼭지점의 좌표는 $(a, 0)$와 (c, d)이다. 다음 그림에서 보는 바와 같이 이 삼각형의 넓이는 점선과 두 축으로 둘러싸인 직사각형의 넓이의 반이므로

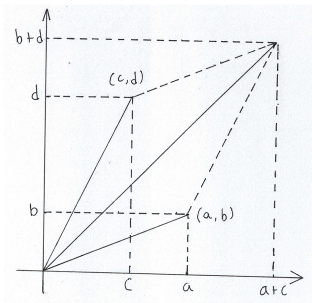
$$\frac{1}{2}|ad| = \frac{1}{2}|ad - 0c|$$

이다.



삼각형의 넓이 (2)

이제 한 꼭지점은 원점에 있지만 변들이 일반적인 위치에 놓인 경우에는 아래 그림에서와 같이 원점을 꼭지점으로 하는 이 삼각형의 두 변을 평행이동하여 평행사변형을 만들자.[2)]



그러면 삼각형의 넓이는 평행사변형의 넓이의 반이다. 그런데 평행사변형의 넓이를 계산하면, 큰 직사각형의 두 변의 길이가 $a+c$와 $b+d$이므로

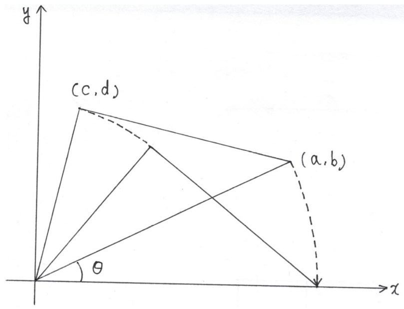
$$|(a+c)(b+d) - ab - cd - 2bc| = |ad - bc|$$

이다.

삼각형의 넓이 (3)

조금 더 일반적인 방법을 사용하기 위해서 원점을 포함하는 한 변을 회전하여 x축 위에 가져다 놓고 맨 처음의 방법을 쓰기로 해 보자. 어떤 계산을 하여야 하는가? 그림에서와 같이 벡터 (a,b)를 회전하여 x축에 가져다 놓으려면 몇 도를 회전하는가?

2) 이 그림은 일반적이 라고 말할 수는 없다. 꼭지점이 1상한에 놓이지 않는 경우 등은 다른 그림을 그리고 그 경우에도 마찬가지 공식이 성립하는 것을 확인하여야 한다.



그 각을 θ라 하면 $\tan\theta = b/a$이다. 그러므로

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

이 되고 우리의 회전 행렬은 $-\theta$ 만큼의 회전이 되니까

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

이 되고, 따라서 이를 따라 점 (a,b)와 (c,d)를 회전하면

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

빈 쪽

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} ac+bd \\ ad-bc \end{pmatrix}$$

가 된다. 그러니까 위에서 계산했던 공식을 쓰면 넓이는

$$\frac{1}{2}\left|\sqrt{a^2+b^2} \cdot \frac{ad-bc}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \frac{1}{2}|ad-bc|$$

가 된다.

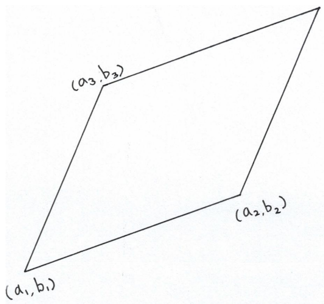
문제 두 변 벡터의 내적을 사용하여 삼각형의 넓이 공식을 유도하여 보아라. (삼각형의 넓이 공식 $(ab\sin\theta)/2$를 사용한다. 여기서 $\sin\theta$를 계산하는데 내적을 활용하자.)

삼각형의 넓이 (4)

삼각형의 넓이를 계산하는 것은 항상 평행사변형의 넓이를 통해서이고, 두 변 벡터가 (a, b), (c, d) 인 평행사변형의 넓이는 다음 행렬식의 값의 절대값이다.

$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

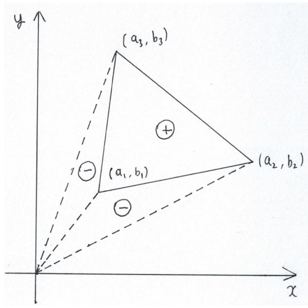
이제 삼각형의 세 꼭지점 (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) 이 주어졌을 때 이 삼각형의 넓이를 구하여 보자.



두 변은 $(a_2 - a_1, b_2 - b_1)$, $(a_3 - a_1, b_3 - b_1)$ 이므로 넓이의 두 배를 계산하면

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ b_2 - b_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & b_2 - b_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ b_1 & b_2 - b_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) + (a_2 b_3 - a_3 b_2) + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \end{aligned}$$

의 절대값이라는 간단한 공식이 나온다. 이 공식을 보면 다음 그림과 같이 생각해서 얻은 것과 같다는 것을 알 수 있다.

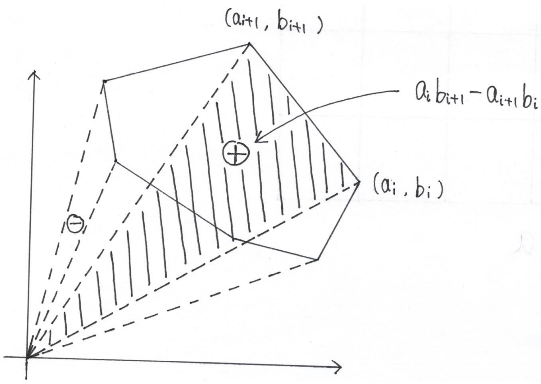


이 때 원점을 품지 않는 변의 방향이 시계방향이면 넓이는 음수가 되어 필요없는 부분이 상쇄된다는 것에 주의하자.

다각형의 넓이

이제 일반적인 다각형의 넓이도 계산할 수 있다. 그림과 같이 꼭지점이 (a_i, b_i), $i = 1, \ldots, n$ 인 볼록 n각형의 넓이를 구해보자. 우선 $(a_n, b_n) = (a_0, b_0)$라고 놓기로 하자.

다음과 같이 그림을 그려 보자.



그러면 이 다각형의 넓이는 다음과 같다는 것을 알 수 있다.

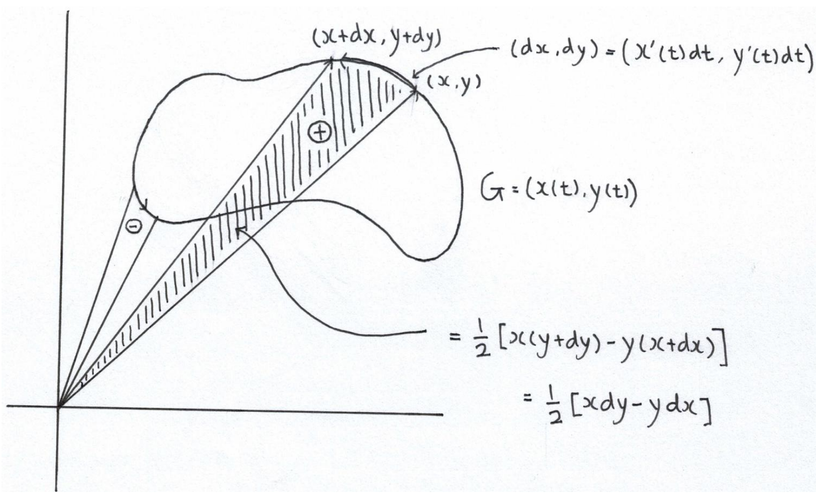
$$\begin{aligned} \text{넓이} &= \frac{1}{2}\Big|(a_1b_2 - a_2b_1) + \cdots (a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1}) + (a_nb_1 - a_1b_n)\Big| \\ &= \frac{1}{2}\Big|\sum_{i=1}^{n}(a_{i-1}b_i - a_ib_{i-1})\Big| \end{aligned}$$

문제 이 사실을 수학적 귀납법을 사용하여 증명할 수 있다. 그 과정을 설명하여 보아라.

1.1.4 미적분에서의 넓이 공식

이제 대학교 1학년에서 공부한 미적분학의 맨 뒤에 나오는 그린의 적분정리와 그의 응용으로 영역의 넓이를 계산하는 공식을 기억하는가?

평면의 영역의 경계가 닫힌 곡선 C 라고 하자. 이제 마치 극좌표에서와 같이 다음 그림을 그리면, 곡선 C 의 작은 부분은 점 (x, y) 에서 점 $(x + dx, y + dy)$ 라고 쓸 수 있다.



여기서 $(dx, dy) = (x'(t)dt, y'(t)dt)$ 이다. 이제 원점과 이 두 점이 만드는 삼각형을 생각하면 이 삼각형의 넓이는 원점과 이 두 점을 잇는 두 선분과 곡선의 작은

부분이 이루는 영역의 넓이와 거의 같다고 할 수 있다. 그런데 이 삼각형의 넓이는 다음과 같이 쓰면 된다.

$$\frac{1}{2}[x(y+dy)-y(x+dx)]=\frac{1}{2}(x\,dy-y\,dx)$$

그러므로 이 곡선 C를 경계로 하는 영역의 넓이는 이를 모두 합하고 dt를 0으로 보내서 얻은 적분인

$$\frac{1}{2}\oint_C (x\,dy-y\,dx)$$

로 나타낼 수 있다.[3)]

1.1.5 $\mathbb{R}^3$에서의 부피와 평행사변형의 넓이

$\mathbb{R}^3$의 평행육면체의 부피를 생각하여 보자. 우리가 맨 처음에 했던 것처럼 부호를 준 부피의 성질이 간단히, (1) 단위 정육면체의 부피가 1이라는 것과 (2) 두 모서리의 순서를 바꾸어 향을 바꾸면 부피의 부호가 바뀌기로 정하고, (3) 한 모서리 벡터를 두 벡터의 합으로 표시하면 부피는 이 두 벡터 각각에 대한 부피의 합으로 나타내어진다는 사실로부터 완전히 정하여진다는 것을 확인하면, 평행육면체의 부피는 한 꼭지점을 공유하는 세 모서리 벡터의 함수로서 이 세 벡터의 행렬식의 값이 된다는 것을 쉽게 알아볼 수 있다.

1학년 미적분학에서는 이 세 모서리 벡터가 a, b, c일 때 주어진 평행육면체의 부호를 준 부피는

$$a\cdot(b\times c)$$

라는 공식으로 주어진다는 것을 증명하였고, 이어서 이것이 행렬식의 값이라는 것을 알아보았다. 이 때 증명에 사용된 방법은 외적의 성질과 기하학을 썼다. 이

3) 여기서 원점을 중심으로 x축에서부터 잰 각을 θ로 나타내기로 하면 (즉, 극좌표를 생각하면), 거의 모든 점에서 $\theta=\tan^{-1}(y/x)$이고 따라서

$$d\theta=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}\quad 즉,\quad \frac{1}{2}(x\,dy-y\,dx)=\frac{1}{2}r^2d\theta$$

이 된다. 그러므로 여기의 좁은 삼각형 하나의 넓이는 대략 좁은 부채꼴의 넓이를 계산한 것과 같다는 것을 알 수 있다. 그리고 위의 넓이 적분 공식은 극좌표 넓이 공식인 $(1/2)\int_C r^2d\theta$와 같다.

때 $b \times c$라는 벡터는 b, c와 수직이고 이를 두 변으로 하는 평행사변형의 넓이를 길이로 가지는 벡터라고 정의하였었다.

그러나 $b \times c$가 b와 c에 수직이라는 사실만 알고 이 외적의 크기를 모른다고 가정하고, 위의 사실들과 1학년 미적분학의 기하를 다시 보면 $b \times c$라는 벡터의 크기가 b, c를 변으로 하는 평행사변형의 넓이가 되어야 한다는 사실을 역으로 알아낼 수 있다.

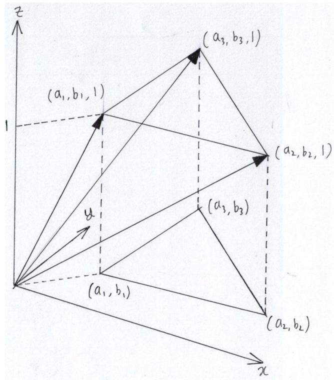
문제 $b \times c$가 b와 c에 수직이라는 사실만 가정하고 위의 계산들로부터 $b \times c$의 크기가 b와 c가 두 변인 평행사변형의 넓이임을 보여라. 또,

1. $b \times c$가 b와 c의 선형함수이고,
2. b, c와 수직하며,
3. b, c, $b \times c$는 오른손 법칙을 만족시키며,
4. b, c가 orthonormal basis 가운데 두 개일 때 $b \times c$는 세 번째 basis 벡터가 된다.

는 사실만 사용하여 $b \times c$의 크기는 항상 b와 c를 두 변으로 하는 평행사변형의 넓이가 됨을 설명하여라.

삼각형의 넓이 (5)

이제 평면의 세 점 (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)을 꼭지점으로 하는 삼각형의 넓이를 다시 보자.



그림과 같이 이 세 꼭지점을 xy 평면 위로 1만큼 들어올리면 이 세 점의 좌표가 각각 $(a_1, b_1, 1)$, $(a_2, b_2, 1)$, $(a_3, b_3, 1)$ 이 되고, 원점과 이 세 꼭지점을 잇는 벡터를 모서리로 하는 평행육면체의 부피는 이 삼각형의 넓이의 두 배이다. (원점과 이 세 점을 이어 만들어진 삼각뿔의 높이가 1 이므로 이 뿔의 부피는 삼각형 넓이의 1/3 이다. 한편 평행육면체의 부피는 이 삼각뿔의 6 배이다.)

따라서 구하는 삼각형의 넓이는 다음과 같이 행렬식으로 나타내어진다.

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

앞에서 구한 공식과 비교해 보아라.

1.2 노옴과 내적

이 절의 목표

1. 거리, 노옴, 내적의 정의를 알아본다. 내적에서 노옴을 만들고, 노옴에서 거리를 만드는 방법을 알아본다.
2. 내적에서부터 만들어진 노옴은 평행사변형 법칙을 만족시키고 그 역도 성립함을 알아본다.
3. 내적과 노옴에 대하여 성립하는 부등식들을 알아본다: 코시-슈바르츠 부등식, 볼록함수의 젠센 부등식, Hölder 부등식, 민코브스키 부등식, 등.

들어가기

중학교부터 유클리드 기하의 여러 성질을 공부하고 고등학교 때는 좌표와 벡터를 사용하여 기하의 계산을 쉽게 하는 방법을 배웠다. 이러한 모든 것이 가능한 것은 유클리드 기하가 여러 성질들 가운데서도 두 점 사이의 거리와 두 직선이 이루는 각의 크기라는 기본 개념에 바탕을 두고 있고 이것들을 숫자로 나타낼 수 있기 때문이다.

따라서 기하를 잘 이해하려면 이 두 가지 개념을 제대로 이해하고 이를 사용하는 도구들 사이의 관계를 파악하고 있지 않으면 안 된다. 현대 수학은 그 모든 분야가 서로 연관지어 활용되고 있고 논리적으로는 기호논리에 바탕을 둔 듯이 보이지만 사실 그 밑바닥에는 항상 기하학적 직관을 깔고 있다.

이 절에서 우리는 기하에 대수를 활용하는 방법의 기본이 되는 개념들과 도구들을 알아본다.

1.2.1 내적, 노옴의 정의

고등학교 때 공부한 벡터의 내적은 매우 유용한 개념이어서 어디서나 사용하고 싶다. 따라서 고등학교 때의 정의보다는 활용이 쉬운 방법을 찾아 다음과 같은

추상적인 정의를 만들었다.[4)]

정의 1.3. $\mathbb{R}^n$의 내적이란 두 벡터변수 함수 $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$로서 다음 조건을 만족시키는 것이다.

1. (양정치) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \geq 0$이고, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = 0$일 필요충분조건은 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$인 것이다.
2. (대칭성) 모든 벡터 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$에 대하여 다음이 성립한다[5)]:

   $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle$,
3. (쌍선형 1) 모든 벡터 $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}$에 대하여 다음이 성립한다:

   $\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}\rangle$,

   $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_2\rangle$,
4. (쌍선형 2) 모든 실수 α에 대하여 다음이 성립한다:

   $\langle \alpha\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \alpha\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \alpha\mathbf{w}\rangle$.

즉, 내적은 양정치 *(positive definite)*이고, 쌍선형 *(bilinear)*인 대칭 *(symmetric)* 함수이다.

예 1.3.1. $\mathbb{R}^2$ 위에 다음과 같은 함수를 주면 이것은 내적이다.

1. $\langle (a, b), (c, d)\rangle = ac + bd$.
2. $\langle (a, b), (c, d)\rangle = 2ac + 3bd$.

문제 (a, b), (c, d)의 다음 함수는 내적이 아닌 이유를 밝혀라.

1. $ac - bd$

4) 여기서 그리고 다음에 나오는 노옴의 정의에서 보겠지만 수학에서 개념을 정의할 때는 이것이 무엇이다라고 하기보다는 이것은 어떠한 것, 즉, 어떻게 사용하는 것이다, 또 다른 것들과 어떤 관계에 있는 것이다라는 식으로 정의하는 것을 좋아한다. 이렇게 하면 훨씬 많은 대상에다가 이 개념을 적용할 수 있게 된다.

5) 이런 방식으로 계산할 수 있는 것은 모두 내적이라고 부르고 사용해도 된다.

2. $ad + bc$
3. $ad - bc$

내적은 벡터의 크기를 정하여준다.[6)] $\|\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle^{1/2}$ 를 벡터의 크기라 하면, 이는 다음과 같은 성질을 가진다.

정리 1.3.1. 벡터의 크기에 대하여 다음이 성립한다.

1. $\|\mathbf{v}\| \geq 0$이고, $\|\mathbf{v}\| = 0$이 되기 위한 필요충분조건은 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$이다.

2. 모든 실수 α에 대하여 $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$가 성립한다.

3. $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

이 정리에서 (1)과 (2)의 증명은 간단하므로 숙제로 남겨둔다. 삼각부등식 (3)의 증명은 조금 뒤로 미루어 둔다.

일반적으로 $\mathbb{R}^n$ 의 함수 $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$이 정리 1.3.1의 성질을 모두 만족시킬 때 이를 노옴(norm)이라 한다.

문제 $\mathbb{R}^2$ 위에 주어진 다음 함수는 노옴임을 보여라.

1. $\|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$
2. $\|(a, b)\| = \sqrt{2a^2 + 3b^2}$
3. $\|(a, b)\| = |a| + |b|$
4. $\|(a, b)\| = \max\{|a|, |b|\}$

1.3.1 내적과 노옴

궁금한 것은 앞 절의 문제 1.2.1의 노옴은 어떤 내적을 가지고 만든 것인가 하는 것이다. 과연 이것들을 벡터의 크기가 되도록 하는 내적은 있는 것인가? 위

6) 이것이 내적으로부터 만들어지는 벡터의 크기의 정의이다.

의 문제의 첫 번째 노옴 $\|(a,b)\| = \sqrt{a^2+b^2}$은 고등학교 때부터 사용하던 내적 $\langle (a,b),(c,d)\rangle = ac+bd$를 사용하면 만들 수 있다는 것을 알 수 있다. 그리고 둘째 노옴 $\|(a,b)\| = \sqrt{2a^2+3b^2}$는 내적 $\langle (a,b),(c,d)\rangle = 2ac+3bd$로부터 만들 수 있다는 것도 어렵지 않게 알 수 있다.

그러면 다른 노옴은 어떤가? 이것을 알아보기 위하여 위의 문제에서 노옴 $\|(a,b)\| = |a|+|b|$를 가지고 생각해 보자.[7)]

이것이 내적 $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$에서 만들어졌다고 가정하고 몇 가지 계산을 해 보자. 우선 $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$이라 놓자. 그리고 이 노옴에 대하여 계산하면

$$\|\mathbf{e}_1\| = 1, \quad \|\mathbf{e}_2\| = 1$$

이다. 이제 $(1,1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$에 대하여 계산하여 보면 다음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} 2^2 = \|(1,1)\|^2 = \|\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\|^2 &= \langle \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\rangle \\ &= \|\mathbf{e}_1\|^2 + \|\mathbf{e}_2\|^2 + 2\langle \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle = 2 + 2\langle \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle \end{aligned}$$

이므로 $\langle \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle = 1$이라야 한다. 그런데 똑같은 계산을 $(1,-1) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$에 대하여 해 보면

$$2^2 = \|(1,-1)\|^2 = \|\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2\|^2 = 2 - 2\langle \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle$$

가 되어 $\langle \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle = -1$이 되어 모순된다. 그러므로[8)] 이 노옴을 벡터의 크기로 가지는 내적은 존재할 수가 없다는 것을 알 수 있다.

그러면 어떤 노옴이 내적으로부터 만들어진 것인지 아는 방법은 있는가? 위의 계산을 잘 살펴보면 다음 도움정리를 얻는다.

도움정리 1.3.2. 노옴 $\|\cdot\|$가 내적 $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$로부터 만들어지면 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 &= 2\big(\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2\big), \\ \|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 &= 4\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle. \end{aligned}$$

이 때 앞의 식은 평행사변형 법칙이라 하고 두 번째 식은 *polarization identity*라 한다.

7) 이것이 내적에서 나왔다면 잘못되는 부분이 생기는가를 확인하려면 여러 계산을 해 보며 잘못될 수 있는 부분을 찾아내야 한다. 그리고 이런 것은 금방 알아낼 수 있는 특별한 방법은 없다.

8) 여기서 귀류법을 사용하였다.

(증명) 증명은 간단하다. 다음 식

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle,$$
$$\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 - 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$$

으로부터 바로 나온다. ■

따라서 내적으로부터 만들어진 노옴은 평행사변형 법칙을 만족시켜야 하고 따라서 이것을 만족시키지 못하는 노옴은 당연히 어떤 내적으로부터도 만들어낼 수 없다.

문제 앞의 예의 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$가 평행사변형 법칙을 만족시키지 않음을 확인하여라.

그러면 평행사변형 법칙을 만족시키는 노옴은 모두 어떤 내적으로부터 만들 수 있는가? 그 답은 yes이다. 다음 Fréchet-von Neumann-Jordan의 정리를 보자.

정리 1.3.3. $\mathbb{R}^n$의 노옴이 내적으로부터 유도되기 위한 필요충분조건은 이 노옴이 평행사변형 법칙을 만족시키는 것이다.

(증명) 필요조건이라는 부분은 이미 위에서 알아보았다. 이제 충분조건임을 증명하기 위하여 주어진 노옴에서 내적을 만들어내기로 하자. 내적은

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2\right)$$

라고 정의하면 될 것이다. 이제 이것이 내적이 됨을 내적의 정의를 확인함으로써 증명하자. 우선

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle$$

가 성립함은 당연하다. 또

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \frac{1}{4}\|2\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \ge 0$$

이고 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = 0$이 되는 경우는 $\|\mathbf{v}\| = 0$인 경우 뿐이며 이는 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$일 때 뿐이다.

세 째 조건 $\langle \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}\rangle$가 성립함을 알아보기 위하여 다음과 같은 계산을 하자.

$$\begin{aligned}
4\langle \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2, \mathbf{w}\rangle &= \|\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2+\mathbf{w})\|^2 - \|\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2-\mathbf{w}\|^2 \\
&= \left(2\|\mathbf{v}_1\|^2 + 2\|\mathbf{v}_2+\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}_1-(\mathbf{v}_2+\mathbf{w})\|^2\right) - \|\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2-\mathbf{w}\|^2 \\
&= 2\|\mathbf{v}_1\|^2 + 2\|\mathbf{v}_2+\mathbf{w}\|^2 - \left(2\|\mathbf{v}_1-\mathbf{w}\|^2 + 2\|\mathbf{v}_2\|^2\right)
\end{aligned}$$

이제 이 식이

$$4\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}\rangle + 4\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}\rangle = \big(\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}\|^2\big) + \big(\|\mathbf{v}_2 + \mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}_2 - \mathbf{w}\|^2\big)$$

와 같다는 것을 보이기 위하여 두 식의 차를 계산하면

$$\begin{aligned} &2\|\mathbf{v}_1\|^2 - 2\|\mathbf{v}_2\|^2 + \big(\|\mathbf{v}_2 + \mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{v}_2 - \mathbf{w}\|^2\big) - \big(\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}\|^2\big) \\ &= 2\big(\|\mathbf{v}_1\|^2 - \|\mathbf{v}_2\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 - \big(\|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2\big)\big) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

이 되어 증명되었다.

마지막 성질 $\langle \alpha\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \alpha\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$의 증명은 다음 문제를 따라 스스로 증명하여 보자. ■

문제 위의 계산으로부터 다음 과정을 따라 위의 증명을 마무리하자.[9)]

1. 임의의 자연수 m에 대하여 $\langle m\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = m\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$가 성립함을 보여라.
2. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{0}\rangle = 0$와 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = -\langle \mathbf{v}, -\mathbf{w}\rangle$가 항상 성립함을 보여라.
3. 임의의 유리수 r에 대하여 $\langle r\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = r\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$가 성립함을 보여라.
4. 평행사변형 법칙을 사용하여 함수 $f(\alpha) = \langle \alpha\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$가 연속함수임을 보이고, 이를 사용하여 모든 실수 α에 대하여 $\langle \alpha\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \alpha\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$가 성립함을 보여라.

1.3.2 몇 가지 부등식

내적과 노옴에 관련된 몇 가지 부등식이 있다. 가장 중요한 것은 코시-슈바르츠의 부등식이다.

정리 1.3.4 (코시-슈바르츠 부등식)**.** 모든 벡터 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$에 대하여 다음 부등식이 성립한다. 특히 등호는 $\mathbf{v} \mathbin{/\!/} \mathbf{w}$일 때만 성립한다.

$$\big|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle\big| \le \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|.$$

(증명) 이 정리의 증명은 실수 t에 대하여 다음 식을 생각한다.

$$\|t\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 t^2 + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle t + \|\mathbf{w}\|^2 \ge 0$$

9) 이 문제는 조금 어렵다.

이 부등식은 모든 실수 t에 대하여 성립하므로 판별식이 부등식

$$\frac{1}{4}D = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2 - \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 \leq 0$$

을 만족시킨다.[10] 따라서 증명되었다. ■

이 정리의 결과로 우리는

$$\frac{\big|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle\big|}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|} \leq 1$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$\frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|} = \cos\theta$$

가 성립하는 적당한 θ를 $0 \leq \theta < \pi$ 되도록 찾을 수 있다. 이 θ를 이 두 벡터 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$가 이루는 각이라고 하고 $\theta = \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w})$로 나타낸다.[11]

문제 $\mathbb{R}^2$와 $\mathbb{R}^3$에서 이 부등식은 벡터의 좌표로 쓰면 어떤 꼴인가 구체적으로 적어보아라.

이 부등식을 알면 앞에서 미루어 놓은 삼각부등식(민코프스키 부등식)

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$$

의 증명을 마칠 수 있다.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 &= \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle \\
&= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \\
&= \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle
\end{aligned}$$

이므로 부등식의 양변을 제곱해서 차를 계산해 보면

$$\big(\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|\big)^2 - \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = 2\big(\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle\big) \geq 0$$

가 되어 증명되었다.

문제 다음 과정을 따라 $\|(a, b)\|_p = \big(|a|^p + |b|^p\big)^{(1/p)}$가 $p \geq 1$일 때 노옴이 됨을 보여라.

10) 등호조건도 따져 보아라.

11) 우리가 각을 정의해서 사용할 때는 각을 등분하거나 서로 다른 두 각의 크기가 같다는 개념을 사용하였다. 그러나 우리는 아직 서로 다른 위치와 방향에 있는 두 각의 크기가 같은지를 알아볼 수 있는 개념이나 도구가 없다. 더욱이 내적이 standard 유클리드 내적이 아닐 때는 각이 무엇인지 확실하지가 않다. 그래서 이 부등식을 사용해서 각을 정의하는 것이 가장 쉬운 방법이다.

1. $f(x) = e^x$ 이고 $0 \le t \le 1$일 때 다음을 보여라:

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y).$$

2. $a, b > 0$, $p, q > 1$이고 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$일 때, $\ln ab = \dfrac{\ln a^p}{p} + \dfrac{\ln b^q}{q}$를 사용하여 영(Young)의 부등식 $ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$을 보여라.

3. $|a|^p + |b|^p = 1$, $|c|^q + |d|^q = 1$일 때, $|ac + bd| \le 1$임을 보이고, 이를 사용하여 다음 Hölder의 부등식을 보여라:

$$|ac + bd| \le \big(|a|^p + |b|^p\big)^{1/p} \big(|c|^q + |d|^q\big)^{1/q}.$$

4. 다음 민코프스키의 부등식을 보여라:

$$\big(|a+c|^p + |b+d|^p\big)^{1/p} \le \big(|a|^p + |b|^p\big)^{1/p} + \big(|c|^p + |d|^p\big)^{1/p}.$$

(힌트: $|a+c|^p \le |a|\,|a+c|^{p-1} + |c|\,|a+c|^{p-1}$와 같이 변형하여 Hölder 부등식을 사용한다.) 이 부등식은 $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|_p \le \|\mathbf{v}\|_p + \|\mathbf{w}\|_p$와 같음을 알아볼 수 있는가?

5. 위의 Hölder와 민코프스키 부등식을 n차원 벡터 $\mathbf{v} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathbf{w} = (b_1, \ldots, b_n)$에 대하여 써 보아라. (증명하지는 말 것.)

1.3.3 Cosine 법칙

삼각형의 두 변이 벡터 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$로 이루어져 있을 때, $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2$을 계산하여 보자.

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 - 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 - 2\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \cos\theta$$

이다. 이는 우리가 고등학교 때 사용하던 삼각형의 변의 cosine (제2) 법칙이다. 이 식은 변형해서

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \frac{1}{2}\big(\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2\big)$$

라고 쓸 수 있다. $\theta = \pi/2$일 때는 이 식의 값이 0이 되며 이는 피타고라스의 정리이다. 따라서 내적은 삼각형의 한 각 θ가 $\pi/2$가 아닐 때, 피타고라스의 정리가 얼마나 틀어지는가를 보여주는 값이라고 할 수 있다.

문제 다른 방향으로 일반화된 피타고라스의 정리를 하나 찾아라. (Jennings, 사면체 등)

1.3.4 거리의 정의

$\mathbb{R}^n$ 의 노옴을 가지고 두 점 사이의 거리를 생각할 수 있다. 실제로 두 점 사이의 거리를

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

라 정의하면 이 거리는 다음 성질을 갖는다.

정리 1.3.5. 위의 거리 d에 대하여 다음이 성립한다.

1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$이다. 또, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$일 필요충분조건은 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$이다.

2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$이다.

3. $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$이다.

이 정리는 노옴의 정의에서 명백하다.

문제 위의 정리의 증명을 마무리하여라.

$\mathbb{R}^n$ 위의 두 점에 대하여 정의된 함수 $d(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$가 위의 정리의 성질들을 만족시킬 때 이를 거리(distance, metric)이라고 한다.

문제 거리 함수로서 노옴으로부터 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$로 정의할 수 없는 것을 하나 찾고 그 이유를 설명하여라.

문제 $\mathbb{R}^2$ 위의 거리 함수 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$는 $\mathbf{x}$에 대하여 연속함수임을 보여라.

1.4 유클리드 공간의 움직임

이 절의 목표

1. 거리를 보존하는 사상(isometry)의 기본성질을 밝힌다.
2. 내적이 주어진 유클리드 공간 $\mathbb{E}^n$ 에서 원점을 보존하는 isometry는 선형사상이다.
3. $\mathbb{E}^2$ 의 isometry는 최대 세번의 뒤집기로 만들 수 있다.
4. isometry를 문제 풀이에 활용한다.
5. $\mathbb{E}^2$ 의 isometry를 식으로 표시하여 보자.

들어가기

Isometry는 거리를 보존하는 사상을 일컫는 말이다. 기하학에서 가장 많이 사용되는 개념의 하나가 합동이고, 합동은 거리를 보존하면서 움직여서 겹쳐진다는 말이므로 isometry를 알 때만 쓸 수 있는 말이다. 유클리드 기하에서 가장 기본되는 개념이 두 점 사이의 거리이며 이것을 보존하는 움직임이 isometry가 되는 것은 기하학에서 가장 중요한 관계라고 할 수 있다.

이러한 사실을 가장 먼저 파악한 사람은 19세기 말 독일의 수학자 Felix Klein 이다. 그는 여러 가지 기하학에서 이의 바탕을 이루는 기본개념이란 무엇이며 어떻게 찾는가 하는 것을 군(group)의 이론을 가지고 설명하는 유명한 강의(Erlangen Program)를 했다.

Klein은 그의 절친한 친구이자 위대한 수학자인 Sophus Lie가 고안한 연속군(continuous group)의 이론을 사용하여, 기하는 그 기하의 고유한 움직임의 군을 가지고 있고 이에 따라 움직일 때 변하지 않는 성질들이 이 기하의 고유한 성질이라는 개념을 처음 만들었다.

1.4.1 Isometry의 모양

$\mathbb{R}^n$에 내적이 주어져 있어서 그 안에서 거리와 각을 사용할 수 있을 때, 이러한 공간을 유클리드 공간이라고 부르고 $\mathbb{E}^n$으로 나타낸다. 선형대수의 중요한 정리인 Gram-Schmidt의 정리에 따르면 이러한 공간에서는 항상 서로 수직이고 길이가 1인 단위벡터로 basis를 만들 수 있다고 한다. 이를 orthonormal basis라고 부르는데 이러한 basis를 좌표축으로 잡으면 우리가 예전에 사용하던 $\mathbb{R}^n$의 보통 축을 잡고 보통 거리를 다루는 것과 똑같은 거리와 각을 사용하게 된다. 그래서 보통 유클리드 공간이라고 하면 $\mathbb{R}^n$ 위에 standard 내적을 준 것이라고 생각해도 된다.

$\mathbb{E}^n$에서 $\mathbb{E}^n$으로 정의된 사상 $F : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$가 거리를 보존한다 함은 모든 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n$에 대하여

$$d\big(F(\mathbf{x}), F(\mathbf{y})\big) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

가 성립함을 뜻한다. 거리를 보존하는 사상을 일반적으로 등거리사상(isometry)이라고 부른다.

그러면 유클리드 평면 $\mathbb{E}^2$에는 isometry가 얼마나 있는가? 그리고 어떤 것들이 있는가?

다음 결과는 가장 기본적인 것이다.

도움정리 1.4.1. $\mathbb{R}^3$ 위의 등거리사상 F가 $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$를 만족하면 F는 직교변환이다.

(증명) 이 정리가 성립하는 것에 대하여는 앞에서 배운

$$\text{내적} \Longrightarrow \text{노옴(Norm)} \Longrightarrow \text{거리}$$

라는 관계를 기억하여 이를 거꾸로 따라가며 생각해본다.

우선, F가 거리를 보존한다는 사실로 부터 이 사상이 노옴을 보존한다는 사실을 알아보자. 노옴 $\|\mathbf{p}\|$는 $d(\mathbf{0}, \mathbf{p})$이므로,

$$\|F(\mathbf{p})\| = d(\mathbf{0}, F(\mathbf{p})) = d(F(\mathbf{0}), F(\mathbf{p})) = d(\mathbf{0}, \mathbf{p}) = \|\mathbf{p}\|$$

이다. 따라서 F는 노옴을 보존한다.

이제 노옴을 보존하는 F는 내적을 보존함을 보이자. 임의의 $\mathbf{p}, \mathbf{q}$에 대하여

$$-2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle = \|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{q}\|^2$$

이다. $\|F(\mathbf{p}) - F(\mathbf{q})\| = d(F(\mathbf{p}), F(\mathbf{q})) = d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|$ 이므로

$$\langle F(\mathbf{p}), F(\mathbf{q})\rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle \tag{1.1}$$

임을 알 수 있다.

마지막으로 이 사상 F가 선형사상임을 보이자. $\mathbf{e}_i$를 $\mathbb{R}^3$의 orthonormal basis 라고 하자. 그러면 임의의 점 $\mathbf{p}$는

$$\mathbf{p} = \sum p_i \, \mathbf{e}_i$$

라고 쓸 수 있다. F가 내적을 보존하므로 $F(\mathbf{e}_i)$도 $\mathbb{R}^3$의 orthonormal basis가 된다. 따라서

$$F(\mathbf{p}) = \sum (F(\mathbf{p}) \cdot F(\mathbf{e}_i)) \; F(\mathbf{e}_i) = \sum (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_i) \; F(\mathbf{e}_i) = \sum p_i \, F(\mathbf{e}_i)$$

이다. 이를 쓰면 쉽게 F가 선형임을 보일 수 있다. ■

문제

1. 위의 증명 가운데서 (1.1)이 성립함을 보여라.
2. 위의 증명에서 F가 선형임을 보이고 이 정리의 증명을 마무리하여라.

정리 1.4.2. $\mathbb{E}^2$의 임의의 *isometry* G는 평행이동 T와 직교변환 F의 합성이 된다. 즉,

$$G = T \circ F.$$

(증명) 이제 유클리드 평면의 임의의 등거리사상 G를 생각해 보자. $G(\mathbf{0}) = \mathbf{q}$라 놓을 때, $\mathbf{q}$에 의한 평행이동사상 T에 대하여 합성사상 $T^{-1} \circ G$를 생각하면, 이 사상은 $T^{-1} \circ G(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$인 등거리사상이 된다. 그러므로 $T^{-1} \circ G = F$는 직교변환이다. 그러므로 평행이동 T와 직교변환 F에 대하여

$$G = T \circ F$$

꼴로 표시된다. ■

1.4.2 대칭이동과 isometry

평면의 isometry는 다른 방법으로 나타낼 수도 있다. 평면의 한 직선 l을 잡으면 이 직선에 대한 대칭이동(reflection)을 생각할 수 있다. 평면의 isometry을 대칭이동을 써서 나타내는 다음 유명한 정리가 있다.

정리 1.4.3. 평면의 임의의 *isometry*는 최대한 세 직선에 대한 대칭이동의 합성으로 나타낼 수 있다.

(증명) 평면의 isometry φ를 잡자. 우선 서로 다르면서 한 직선 위에 놓이지 않는 세 점을 잡아 A, B, C라 하자. 그러면 이 각각의 점은 φ에 의해 세 점 A', B', C'으로 대응된다.

이제 A와 A'이 서로 다른 점이면 선분 $\overline{AA'}$의 수직이등분선에 대한 대칭이동을 하여 A를 A'으로 대응시킨다. 이 대칭이동에 의하여 B, C는 B_1, C_1으로 대응된다고 하자. 이제 B_1과 B'이 서로 다른 점이면 선분 $\overline{B_1B'}$의 수직이등분선에 대한 대칭이동을 하여 B_1을 B'으로 대응시킨다. 이 때 A는 고정되어 있고 C_1은 C_2로 대응된다. 마지막으로 C_2가 C'이 아니면 직선 $A'B'$에 대한 대칭이동을 하여 C_2를 C'으로 대응시킨다. (지금 까지의 대응에서 점이 이미 일치하여 있는 경우에는 아무런 대칭이동도 필요 없다.)

이제 이 세 개의 대칭이동을 순서대로 합성하면 세 점 A, B, C를 A', B', C'에 대응시키는 isometry이다. 이 isometry를 ψ라 하자.

이제 $\psi \circ \varphi$는 세 점 A, B, C를 고정시키는 isometry이다. 이 isometry는 단위사상임을 보이자.

우선 평면에 점 A를 원점으로 하는 좌표를 잡는다. 그러면 $\overleftrightarrow{AB}$와 $\overleftrightarrow{AC}$는 서로 평행하지 않으므로 평면의 basis를 이룬다. $\psi \circ \varphi$는 원점(A)을 고정시키는 isometry이므로 선형변환이고 두 basis 벡터도 고정하므로 단위사상이 된다. ■

문제

1. 두 평행한 직선 l, l'이 있다. l에 대한 대칭이동과 l'에 대한 대칭이동을 합성하면 어떠한 사상이 되는가?

2. 점 P에서 만나는 서로 다른 두 직선 l, l'이 있다. l에 대한 대칭이동과 l'에 대한 대칭이동을 합성하면 어떠한 사상이 되는가?

1.4.3 Isometry의 응용

시간이 없는 관계로 5개의 문제로 넣어 둔다.

문제 강가에 사는 영준이는 집이 지점 A에 있고, 마굿간이 강의 같은 쪽인 지점 B에 있다. 집에서 물통을 들고 나와 강가에서 물을 길어 마굿간에 가려면 어떤 경로로 가는 것이 가장 가까운가? 그 이유를 설명하여라.

문제 같은 폭으로 똑바로 흐르는 강이 있다. 이 강물의 한 쪽에는 도서관이 있고 다른 쪽에는 학교가 있다. 도서관에서 학교까지 가장 빨리 갈 수 있도록 강에 다리를 놓으려고 한다. 다리는 강물의 흐름에 수직 방향으로 놓는다. 어느 지점에 다리를 놓아야 하는가? 그 이유를 설명하여라.

문제 직사각형 당구대가 있다. 이 당구대 위의 공 A가 당구대의 변을 세 번 맞추고 다른 공 B를 맞추려고 한다 어느 방향으로 공을 쳐야 하는가? 그 이유를 설명하여라.

문제 평면 위에 사각형—직사각형이 아니다—이 있다. 사각형의 변 위의 한 점 A에서 출발하여 순서대로 네 변의 한 점씩을 거쳐서 다시 A로 돌아오려고 한다. 가장 빨리 돌아오려면 어떤 경로를 택하여야 하는지 설명하여라.

문제 평면에 수직으로 서 있는 두 개의 거울이 각도 $0 < \alpha < \pi$를 이루고 있다.

1. 이 두 거울 사이의 한 지점에 서 있는 촛불을 이 거울 사이의 다른 지점에 있는 사람이 바라볼 때 거울에는 촛불의 상이 몇 개 생기는가? $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, 0.2\pi$ 각각의 경우에 답하고 그 이유를 설명하여라.
2. 이 촛불의 상의 개수를 α의 함수로 나타내면 어떤 함수가 되는가?
3. 현실적인 상황에서는 이 문제를 푸는데 어떤 난점이 있는가?

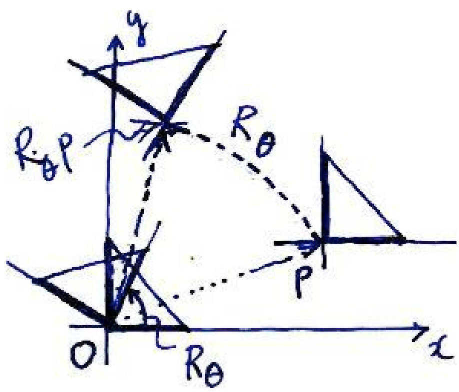
1.4.4 Isometry의 합성

Isometry를 다루는 것이 쉽지 않은 것은 이들의 합성을 계산하는 것이 단순하지 않기 때문이기도 하다. 모든 isometry는 직교변환과 평행이동으로 만들어져 있다. 직교변환은 직교행렬로 만들어져 있으며 이들 전체는 $O(n)$이라는 리 군(Lie Group)을 이룬다. 한편, 평행이동 전체는 평면의 벡터만큼 있으므로 $\mathbb{R}^2$와 같다고 할 수 있다.

이 두 가지 사상들은 어떻게 결합되어 있는가? 예를 들어 직교변환의 하나인 θ 만큼의 회전 R_θ와 벡터 $\mathbf{p}$에 의한 평행이동 $T_\mathbf{p}$를 합성한 사상을 알아보자. 특히 이 두 사상의 합성은 순서를 바꾸어 합성하면 같은 사상을 얻는가? 아니면 서로 다른 사상이 되는가? 계산해 보면

$$R_\theta \circ T_\mathbf{p}(\mathbf{x}) = R_\theta(\mathbf{x}+\mathbf{p}) = R_\theta(\mathbf{x}) + R_\theta(\mathbf{p}) = T_{R_\theta(\mathbf{p})} \circ R_\theta(\mathbf{x})$$

이므로, $R_\theta \circ T_\mathbf{p} = T_{R_\theta(\mathbf{p})} \circ R_\theta$가 된다. 이 합성의 결과를 그림으로 나타내어 보면 다음과 같다.



이 식의 좌변이 aba^{-1} 꼴임을 눈여겨 보아라.

이 결과는 다음과 같이 잘 나타낸다.

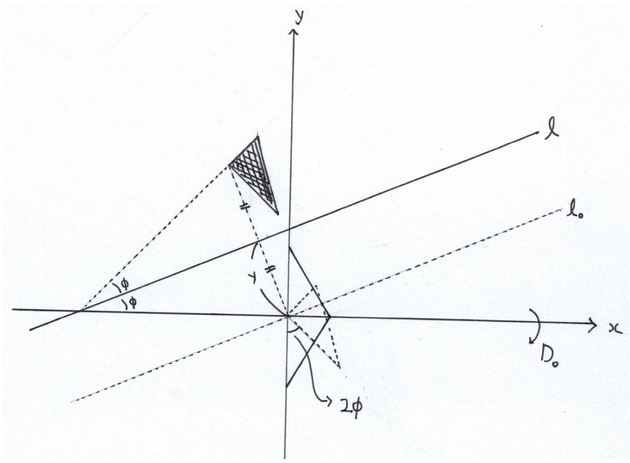
$$R_\theta \circ T_\mathbf{p} \circ R_{(-\theta)} = T_{R_\theta(\mathbf{p})}.$$

문제 이 결과로부터 $T_\mathbf{p} \circ R_\theta = R_\theta \circ T_{R_{(-\theta)}}$가 성립함을 보여라. 또, 두 사상 $R_\theta \circ T_\mathbf{p}$와 $T_\mathbf{p} \circ R_\theta$는 같은 사상이 아님을 보여라.

평면의 x축에 대한 대칭이동을 D_0라고 하자. 그러면 직선 l에 대한 대칭이동 D_l은 어떻게 되는가?

문제 직선 l이 x축과 이루는 각을 ϕ라 하고 원점에서 직선 l에 내린 수선의 발을 벡터로 $\mathbf{y}$라 할 때, 다음이 성립함을 보여라.

$$D_l = T_{2\mathbf{y}} \circ R_{2\phi} \circ D_0.$$



앞절에서 우리는 일반적인 등거리사상 Φ가 적절한 직교변환 A와 벡터 $\mathbf{p}$를 사용하여

$$\Phi : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{p}$$

와 같이 나타내어짐을 알고 있다. 이제 이러한 사상이 또 하나 있다고 하자. 이 사상을

$$\Psi : \mathbf{x} \mapsto B\mathbf{x} + \mathbf{q}$$

로 나타내자. 이제 이 두 사상의 합성은 어떻게 되는가?

$$\Phi \circ \Psi(\mathbf{x}) = A\Psi(\mathbf{x}) + \mathbf{p} = A(B\mathbf{x} + \mathbf{q}) + \mathbf{p} = AB\mathbf{x} + A\mathbf{q} + \mathbf{p}$$

가 되므로 합성사상은 직교변환 AB와 $A\mathbf{q} + \mathbf{p}$만큼의 평행이동이 된다. 이것이 평면의 등거리사상의 일반 합성 공식이다. 이것을 계산하기 편하게 다음과 같이

나타내기도 한다.[12)]

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & \mathbf{q} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & A\mathbf{q} + \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

12) 벡터 $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $\begin{pmatrix} A & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}$와 같이 변환하는 사상 $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{p}$을 의사변환(affine transformation)이라고 부른다.

1.5 가장 짧은 곡선

이 절의 목표

1. 평면의 두 점을 잇는 가장 짧은 곡선이 직선임을 두 가지 방법으로 보인다.
2. 두 번째 방법에서 변분법의 기초 개념을 알아본다.

들어가기

우리는 오래 전부터 평면의 두 점을 잇는 가장 짧은 곡선은 직선이라는 사실을 알고 사용해 왔다. 얼핏 보기에 이것은 당연한 사실인 것 같지만 왜 그런가하고 생각해 보면 증명이 쉽지 않다. 이것은 우선 곡선의 길이가 무엇인가를 제대로 정의하지 않으면 해결할 수 없는 문제이다.

미적분을 공부할 때 곡선의 길이를 정의할 수 있다는 것을 배웠으므로 여기서부터 출발하여 이 사실을 증명하여 보자. 이것은 미적분의 응용으로서도 좋은 문제이고 나아가서 더 깊은 생각을 해 볼수 있는 기회로 삼을 수도 있다.

1.5.1 두 점 사이의 최단곡선 (1)

두 점 사이를 잇는 가장 짧은 곡선을 찾아보자. 평면의 평행이동은 거리도 곡선의 길이도 변화시키지 않으므로 두 점 가운데 하나를 원점으로 옮겨 놓아도 된다. 따라서 두 점이 O, $\mathbf{p}$라고 가정하자.

정리 1.5.1. 두 점 O, $\mathbf{p}$를 잇는 곡선의 길이 가운데 가장 짧은 것은 이 두 점을 잇는 직선이다.

(증명) 두 점을 잇는 미분가능한 곡선을 $C : (x(t), y(t))$라고 하자. 여기서 $O = (x(0), y(0))$이고, $\mathbf{p} = (x(a), y(a))$이다. 이를 극좌표로 나타내면

$$C : (r(t), \theta(t)), \quad \mathbf{p} = r(0) = 0, \quad (r(a), \theta(a))_P$$

이다. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$이므로

$$x'(t) = r'(t)\cos\theta(t) - r(t)\theta'(t)\sin\theta(t),$$
$$y'(t) = r'(t)\sin\theta(t) + r(t)\theta'(t)\cos\theta(t)$$

이고, 따라서 이 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2}dt &= \int_0^a \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 + \theta'(t)^2}dt \\ &\geq \int_0^a \sqrt{r'(t)^2}dt = \int_0^a |r'(t)|\,dt \\ &\geq \int_0^a r'(t)\,dt = r(a) - r(0) = r(\mathbf{p}) = d(O, \mathbf{p})\end{aligned}$$

가 되어 이 곡선의 길이는 항상 두 점 사이의 거리보다 크거나 같게 된다.[13] 이 곡선이 이 두 점을 잇는 직선일 때는 그 길이가 두 점 사이의 거리가 되므로 직선일 때가 최단거리 곡선이다. ■

1.5.2 두 점 사이의 최단곡선 (2) — 어려운 방법

위의 증명은 극좌표를 이용한 가장 간단한 증명이다.[14] 이보다 더 간단한 증명은 하기 어렵지만 조금 다른 방법을 써서 이 정리를 증명해 보면 미적분에 대하여 더 잘 알 수 있게 된다.

다음과 같은 생각을 하여 보자. $\alpha(s) = (x(s), y(s)) : 0 \leq s \leq a$가 두 점을 잇는 미분가능한 곡선이다. 이 때 이 곡선의 길이가 두 점을 잇는 모든 미분가능한 곡선 가운데서 가장 짧다면 이 곡선을 조금 변형시켜 보아도 그 길이는 더 짧아질 수 없다. 따라서 이러한 변형 가운데서 가장 짧은 곡선일 때 길이함수는 최소값을 가진다.

이제 다음과 같이 변형을 해 보자. 우선 이 곡선의 각 점에서의 속도벡터 $\alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$는 단위벡터라고 가정하자. 이제 이 $\alpha'(s)$를 시계 반대 방향으로 $\pi/2$ 만큼 회전하여 얻은 벡터를

$$\mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$$

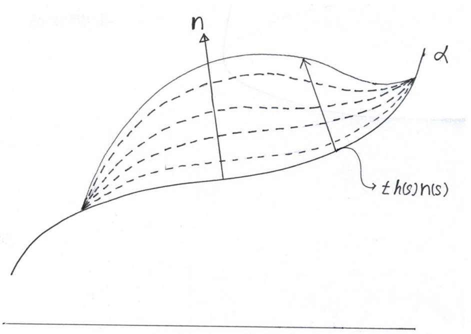
13) 이 증명의 장점과 단점은 무엇인가?

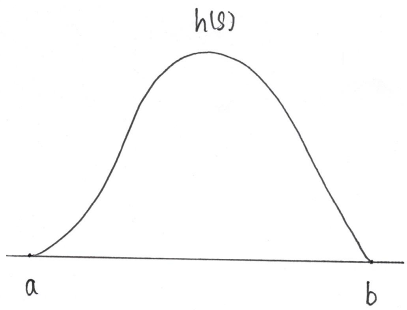
14) 이 절의 계산방법을 변분법이라고 한다.

이라 하면 $\mathbf{n}(s)$는 이 곡선의 각 점에서 이 곡선에 수직인 단위벡터가 된다. 이제 다음 식으로 주어지는 곡선들을 생각해 보자.

$$\alpha_t(s) = \alpha(s) + th(s)\mathbf{n}(s).$$

여기서 연속함수 $h(s)$는 $h(0) = h(a) = 0$이고 $(0, a)$ 위에서는 미분가능한 함수이다.





t가 변할 때 α_t의 길이 $l(t)$는 $t = 0$에서 최소값을 가져야 한다. 따라서 $l'(0) = 0$이 되지 않으면 안 된다. 이제 $l'(t)$는 어떤 함수인가? 직접 계산해 볼 수 있다. s에 대한 미분을 '$\prime$'으로 나타내기로 하면

$$l(t) = \int_0^a |\alpha_t'(s)|\, ds = \int_0^a \sqrt{\alpha_t'(s) \cdot \alpha_t'(s)} ds.$$

이므로

$$\frac{d}{dt} l(t) = \frac{d}{dt} \int_0^a \sqrt{\alpha_t' \cdot \alpha_t'} ds = \int_0^a \frac{d}{dt} \sqrt{\alpha_t' \cdot \alpha_t'} ds = \int_0^a \frac{\frac{d}{dt}(\alpha_t' \cdot \alpha_t')}{2\sqrt{\alpha_t' \cdot \alpha_t'}} ds$$

이고 $\alpha_t' = \alpha' + th'\mathbf{n} + th\mathbf{n}'$이므로

$$\alpha_t' \cdot \alpha_t' = \alpha' \cdot \alpha' + 2t(h'\mathbf{n} + h\mathbf{n}') \cdot \alpha' + t^2(h'\mathbf{n} + h\mathbf{n}')^2$$

이고 따라서

$$\frac{d}{dt}(\alpha_t' \cdot \alpha_t') = 2\left(\frac{d\alpha_t'}{dt}\right) \cdot \alpha_t' = (h'\mathbf{n} + h\mathbf{n}') \cdot \alpha_t'$$

이다. 이제 $t = 0$을 넣어 보면 α'과 $\mathbf{n}$이 서로 수직이므로

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\alpha_t' \cdot \alpha_t') = (h'\mathbf{n} + h\mathbf{n}') \cdot \alpha' = h\alpha' \cdot \mathbf{n}'$$

이 된다. 이제 관계식

$$0 = \left.\frac{dl}{dt}\right|_{t=0} = \int_0^a \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\alpha_t' \cdot \alpha_t')\, ds = \int_0^a -h(s)\alpha'(s) \cdot \mathbf{n}'(s)\, ds$$

이 양 끝 점에서의 값이 0인 모든 미분가능한 함수 $h(s)$에 대하여 성립한다. 이제 h에 다음과 같은 함수를 넣어보자.

$$h(s) = -s^2(a-s)^2\alpha'(s) \cdot \mathbf{n}'(s)$$

그러면 위의 적분식은

$$0 = \int_0^a \big(s(a-s)\alpha'(s) \cdot \mathbf{n}'(s)\big)^2 ds$$

가 되고, "구간 $[0, a]$에서 항상 음이 아닌 함수의 적분이 0이 되려면 그 함수가 0이 되는 방법 밖에는 없으므로"[15] $\alpha'(s) \cdot \mathbf{n}'(s) \equiv 0$를 얻는다. 이 식은 다시 써 보면

$$0 = (x', y') \cdot (-y'', x'') = y'x'' - x'y''.$$

한편 $(x')^2 + (y')^2 \equiv 1$이므로 양변을 s로 미분하면 $x'x'' + y'y'' = 0$을 얻는다. 이 두 방정식을 연립하여 풀면 $x'' = y'' = 0$이 되고 따라서 $x(s)$, $y(s)$는 s의 1차함수임을 알 수 있다. 즉 $\alpha(s)$는 직선이다.

문제 위의 두 증명에서 두 점을 잇는 곡선은 미분가능하게 나타냈다고 가정하였다. 이러한 가정을 하지 않으면 안 되는가에 대하여 토론하여 보자. 또, 두 번째 가정에서는 곡선의 속력이 1이 되도록 나타내었다고 가정하였다. 이 가정은 어떠한가?

15) 이 사실이 성립하는 이유를 알아보아라.

제 2 장

구면 위의 기하

1. 가우스와 구면 위의 넓이
2. 구면 위의 직선
3. Cosine 법칙
4. 구면의 움직임
5. Stereographic projection
6. $\mathbf{SU}(2)$ 와 $\mathbf{SO}(3)$
7. 사원수와 $\mathbb{R}^3$ 에서의 회전변환
8. $\mathbb{S}^3$ 는 대략 어떻게 생겼나?
9. Hopf 사상 들여다 보기

2.1 가우스와 구면 위의 넓이

이 절의 목표

1. 구면 위의 삼각형의 넓이는 얼마인가에 대한 영악한 증명을 알아본다.
2. 위와 같은 방법을 사용하지 않아도 미적분을 사용하여 꾸역꾸역 계산할 수 있음을 알아본다.
3. 구면 전체의 넓이를 구하는 방법을 알아본다.
4. 이러한 공식들이 단순히 넓이만을 주는 것에 그치지 않고 기하학 자체에 대한 통찰력을 주는 것을 알아본다.

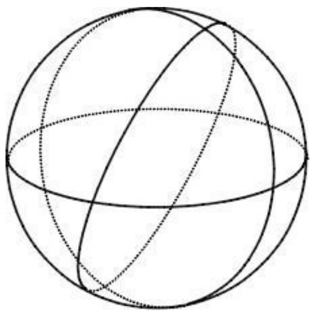
들어가기

구면 위의 삼각형의 넓이 공식은 Gauss가 처음 알아내었다. 가우스가 어떤 방법을 써서 이를 계산하였는지는 잘 알 수 없다. (역사적으로 안 알려져 있다는 것이 아니라, 내가 잘 모른 다는 것이다.) 가우스 같은 천재가 첫째 절의 방법을 몰랐을 리가 없다고 생각한다. 하지만 중요한 점은 가우스는 둘째 절의 방법을 아주 잘 알고 있었다는 것이다.

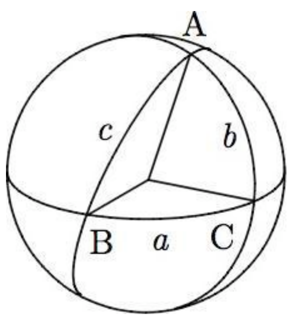
첫째 절의 방법은 정말 감탄을 자아내게 하는 방법이지만 이런 방법의 약점은 단지 감탄밖에는 주는 것이 없을 때가 많다는 것이다. 그러나 이런 방법이 있음에도 불구하고 바보처럼 계산하는 둘째 절의 방법은 그 속에 정말 많은 기하학적 정보를 품고 있다. 이 정보를 잘 분석하고 이해함으로써 가우스는 평면이 아닌 구부러진 면 위에서 어떻게 도형을 이해하는가 하는 체계적인 방법을 그 누구 보다도 먼저 창안해 냈다. 이러한 가우스의 방법은 기하학개론 강의에서 알아보기에는 역부족이다. 그렇지만 그 방법의 첫걸음 정도는 이 증명을 통하여 느껴 볼 수 있을 것이다.

2.1.1 구면 삼각형의 넓이 (1)

이 장에서 우리는 다른 말이 없으면 반지름이 1인 단위구만을 생각한다. 구면 위의 삼각형이라 하면 서로 다른 세 대원이 이루는 도형을 말한다. 다음 그림과 같이 세 대원은 구면을 8개의 영역으로 나눈다.



이 8개의 영역에서 구의 중심에 대하여 마주보는 두 영역끼리는 서로 합동이다. 이 영역 가운데 하나를 구면삼각형이라 하고, 구면삼각형은 세 각과 세 변을 갖는다.



위에서 이미 보아 알 수 있듯이, 구면삼각형의 한 변을 이루는 호의 길이는 이 호가 구의 중심과 이루는 중심각의 크기와 같다. 일반적으로 구면의 호의 중심각을 호각이라고 부르며, 그 크기는 $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$ 또는 a, b, c와 같이 나타낸다.

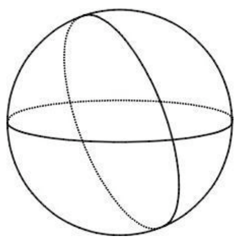
한편 구면삼각형의 한 각의 크기는 이 각을 끼고 있는 각각의 대원을 품는 두 평면이 이루는 이면각과 같다. 이 삼각형의 세 꼭지점을 각각 A, B, C라고 할 때, 세 꼭지각의 크기는 각각 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 또는 그냥 A, B, C로 나타낸다. 이러한 삼각형에 대하여 평면에서와 같은 여러 법칙을 찾을 수 있다.

우선 단위구면의 구면삼각형의 넓이는 다음 식을 만족한다.

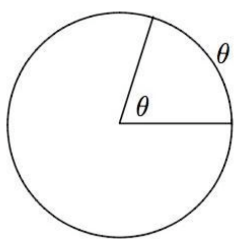
정리 2.1.1 (Gauss의 공식). 단위 구면의 구면 삼각형 ABC에 대하여 다음이 성립한다.

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi + (\triangle ABC \text{의 넓이}).$$

(증명) 이 정리의 가장 쉬운 증명은 그림을 그려 보는 것이다. 상상하기 어려우니까 수박을 놓고 잘라보는 것도 한 가지 방법이다. 우선 구면삼각형을 보기 좋게 다음과 같이 그려 보자. 한 대원은 그림에서 구의 테두리와 겹치게 그렸다.

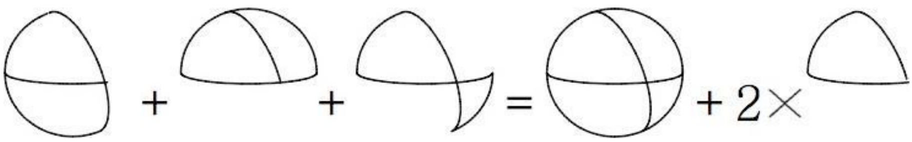


여기서 두 대원으로 잘랐을 때 생기는 길쭉한 부분의 넓이는 얼마인가 이 부분을 두 대원이 만나는 점 위에서 내려다 보면 다음 그림과 같이 보인다. (앞, 뒷쪽이 겹쳐 보인다.)



이 한 부분의 넓이는, 구면 전체가 한바퀴 도는 2π라면 이 부분은 θ만큼이므로 전체넓이의 $\theta/(2\pi)$만큼이라는 것을 알 수 있을 것이다. 구면 전체의 넓이는 4π이므로 이 부분의 넓이는 2θ이다.

이제 왼쪽 위쪽의 삼각형의 넓이를 알아보기 위하여 다음 그림을 보자.



이 그림을 식으로 쓰면 다음과 같다.

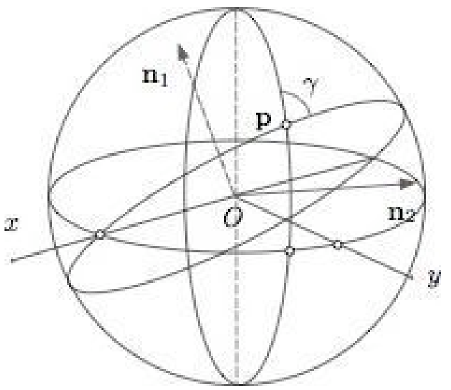
$$2\angle A + 2\angle B + 2\angle C = 2\pi + 2(\triangle ABC \text{의 넓이}).$$

별 설명 없이도 어떻게 증명되는 것인지 알 수 있을 것이다. ■

2.1.2 구면 삼각형의 넓이 (2)

구면 삼각형의 넓이를 직접 적분하여 구하기 위하여 구면 삼각형의 한 꼭지점을 북극점에 놓고 그 마주보는 변인 대원 C는 x축에서 xy평면과 만난다고 하자.[1] 이제 북극점 N과 C 위의 한 점 $\mathbf{p}$를 지나는 대원인 경선이 C와 이루는 각을 γ라고 하면 γ는 어떻게 결정되는가? 다음 그림을 보자.

1) 항상 구면삼각형을 이렇게 놓을 수 있다는 것을 확인하여 보자.



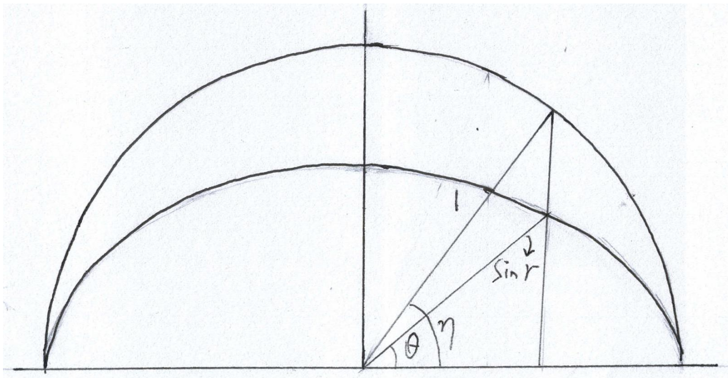
이 그림에서 대원 C가 xy평면과 만나는 이면각을 α라 하면 대원 C가 yz평면과 만나는 점의 좌표는 $(0, \cos\alpha, \sin\alpha)$가 된다. 따라서 대원 C를 품는 평면의 단위법선벡터 $\mathbf{n}_1$은 yz평면 안에서 이 벡터에 수직인 벡터이므로 그 성분은

$$\mathbf{n}_1 = (0, -\sin\alpha, \cos\alpha)$$

이다. 한편 N과 $\mathbf{p}$를 지나는 대원을 품는 평면이 xz평면과 이루는 각을 θ라 하면 이 평면의 단위법선벡터 $\mathbf{n}_2$는

$$\mathbf{n}_2 = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

가 된다. 한편 점 $\mathbf{p}$의 좌표는 어떻게 되는가? 이 좌표는 다음과 같이 두 가지로 구할 수 있다. 대원 C를 xy평면에 정사영하여 얻은 타원을 생각하자. 이 타원은 다음 그림의 점선으로 나타난다.



그리고 대원 C는 이 그림의 실선으로 나타난 원과 같은 모양이면서 타원 위에 겹쳐 보이로록 놓인다. 이 때 $\angle xO\mathbf{p} = \eta$, $\angle NO\mathbf{p} = r$이라 부르기로 하면 점 $\mathbf{p}$의 좌표는

$$\mathbf{p} = (\cos\eta, \sin\eta\cos\alpha, \sin\eta\sin\alpha) = (\sin r\cos\theta, \sin r\sin\theta, \cos r)$$

이다. 이제 y좌표와 x좌표의 비를 계산해 보면 다음 식을 얻는다.

$$\tan\eta\cos\alpha = \tan\theta.$$

이 식에서 $\sin\eta$를 계산해 보면

$$\sin\eta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{\tan^2\theta + \cos^2\alpha}} \tag{2.1}$$

가 된다. 또 z좌표에서 관계식

$$\cos r = \sin\eta\sin\alpha \tag{2.2}$$

를 얻는다. 한편 $\angle(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = \pi - \gamma$이므로

$$\cos\gamma = -\cos(\pi - \gamma) = -\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \sin\alpha\cos\theta \tag{2.3}$$

이다. 이 식을 C를 따라 미분하면

$$-\sin\gamma\, d\gamma = -\sin\alpha\sin\theta\, d\theta$$

를 얻게 된다. 이제 (2.2)을 써서 $\sin\alpha$를 치환하면

$$d\gamma = \frac{\sin\alpha\sin\theta}{\sin\gamma}d\theta = \frac{\cos r\sin\theta}{\sin\eta\sin\gamma}d\theta \tag{2.4}$$

이다. 한편 $\sin\theta = \sin\eta\sin\gamma$이다. 이를 확인하여 보자. (2.1), (2.3)로 부터

$$\cos^2\gamma + \left(\frac{\sin\theta}{\sin\eta}\right)^2 = \sin^2\alpha\cos^2\theta + \sin^2\theta\left(\frac{\tan^2\theta + \cos^2\alpha}{\tan^2\theta}\right) \text{빈 쪽}$$
$$= \sin^2\alpha\cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\alpha\cos^2\theta = 1$$

이 되어 확인되었다. 따라서 (2.4)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$d\gamma = \cos r\, d\theta. \tag{2.5}$$

이제 이 관계식을 활용하여 구면 삼각형의 넓이를 계산하여 보자. 우리의 구면 삼각형은 한 꼭지점이 북극인 N에 있고 다른 두 꼭지점은 대원 C 위에 놓인다. 이 두 점을 각각 B, C라고 하면 구면좌표계 (φ, θ)에서 구면 삼각형의 넓이는

$$\int_{\theta_B}^{\theta_C}\int_0^r \sin\varphi\, d\varphi d\theta = \int_{\theta_B}^{\theta_C}(1-\cos r)d\theta = \int_{\theta_B}^{\theta_C} d\theta - \int_{\theta_B}^{\theta_C} d\gamma$$
$$= \angle N + \gamma_B - \gamma_C = \angle N + \angle B + \angle C - \pi$$

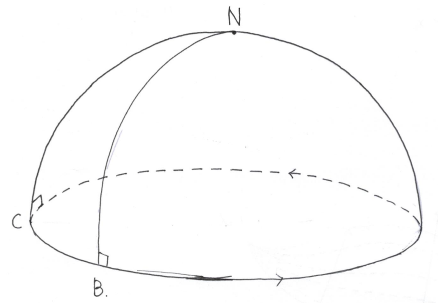
이 되어 증명되었다. ■

이 증명 과정의 관계식 (2.5)는 대원을 따른 가우스의 미분공식이다.

2.1.3 구면의 넓이

이제 구면 전체의 넓이를 구해보자. 앞 절에서 구한 구면 삼각형의 넓이 공식을 활용하면[2)] 다음과 같이 생각할 수 있다. 우선 구면의 반인 북반구만 생각하자. 다음 그림에서 보듯이 이 북반구를 삼각형 NBC로 채워나간다.

2) 앞의 앞절에서 간단한 방법으로 구한 넓이 공식을 사용한다고 하면 결론을 가정으로 사용한 오류에 빠진다.



그림에서 변 BC 는 적도를 B 에서 출발해 전체를 빙 돌아 C 에 도착하는 대원의 긴 부분이다. 이렇게 하면 이 삼각형의 넓이가 거의 북반구의 넓이가 되며 이제 B 가 C 로 다가갈 때 넓이의 극한값이 북반구의 넓이가 된다. 그 넓이는

$$\lim_{B\to C} \angle N + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi = 2\pi$$

이므로 구면의 넓이는 4π 이다.

이제 이 사실을 우리가 잘 하는 방법으로 알아보자.

xy 좌표를 사용하자

우리는 북반구면이 함수의 그래프라는 것을 안다. 함수는

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

이다. 그러니까 1학년에서 공부한 함수의 그래프의 넓이 공식을 쓰자. 적분하면

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dy\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

그러니까 구면의 넓이는 4π 이다.

문제 위의 적분을 계산하여라.

구면좌표계를 사용하자

구면좌표계 (ρ, φ, θ) 는 단위 구면 $\rho = 1$ 위에서는 (φ, θ) 만 남게 되며 넓이의 계산은 $dA = \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$ 를 사용하면 된다는 것을 알고 있다.

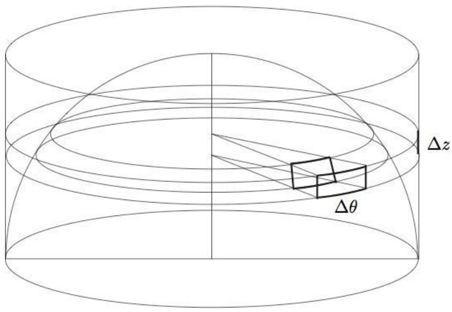
따라서 구면의 넓이는

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{2\pi}(1-(-1))d\theta = 4\pi$$

가 되어 쉽게 계산된다.

원기둥과 비교하자

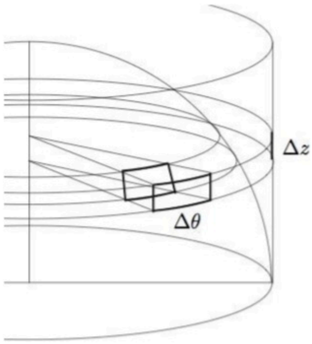
그런데 구면의 넓이를 계산하는 또 한 가지 방법이 있고 이는 유용하게 쓰인다. 우선 구면의 옆에 적도를 z축 방향으로 평행이동하여 만든 원기둥을 세우자. 그리고 z축의 각 점에서 수평 방향으로 바라보아 구면의 점과 겹쳐보이는 원기둥의 점을 서로 대응시키기로 하자.

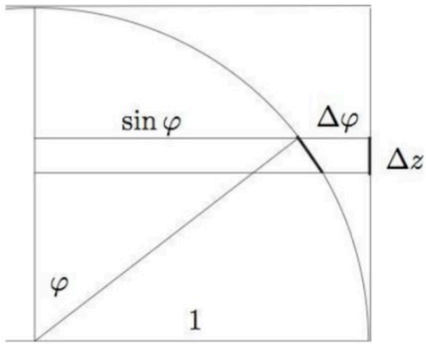


그러면 구면의 각 부분의 넓이와 원기둥의 대응되는 부분의 넓이는 어떤가? 이를 알아보기 위하여 구면에서 $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$ 이고 $\theta_0 \le \theta \le \theta_1$ 으로 정의되는 작은 영역을 보자. 이 구면 영역의 넓이는 대략 $\sin\varphi_0\Delta\varphi\Delta\theta$ 임을 원기둥좌표의 적분공식에서 배워 알고 있다. 원기둥에서 이 영역에 대응되는 부분은 $\cos\varphi_0 \le z \le \cos\varphi_1$ 과 $\theta_0 \le \theta \le \theta_1$ 으로 정의되는 직사각형 영역이며 이의 넓이는

$$\Delta z\,\Delta\theta = (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_0)\Delta\theta \approx \sin\varphi_0\,\Delta\varphi\,\Delta\theta$$

가 되어 이 두 영역의 넓이는 거의 같다. (아래 그림 참조.)





이는 infinitesimal하게 다음이 성립함과 같다:

$$dz\, d\theta = d\cos\varphi\, d\theta = \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta.$$

이러한 영역의 넓이를 부분 부분 모두 합하여 보면 구면의 넓이가 $-1 \leq z \leq 1$ 인 부분의 원기둥 옆면의 넓이와 같다는 것을 알 수 있다. 이 넓이는 $2 \times 2\pi = 4\pi$ 이다.

이러한 이유 때문에 z축에서부터 원기둥에 수평사영하여 만든 세계지도가 사용된다. 이 지도의 장점은 지도의 모든 영역의 넓이가 실제 넓이를 나타낸다는 것이다. 세계화된 부동산에서 쓰임직한 지도이다.

문제 위의 두 곡면의 영역의 넓이 비교를 엄밀하게 하여 실제로 적분이 일치함을 설명하여라.

2.1.4 가우스 공식을 음미하자

가우스의 구면 삼각형 넓이 공식은 구면삼각형의 넓이를 계산하는데 매우 유용해 보인다. 그러나 이러한 쓰임새 말고도 가우스 공식은 의미가 있다. 다음과 같은 물음을 생각해 보자.

(물음) 구면은 평면하고 다른가?

이 물음에 누구나 당장 "그럼! 다르지. 어디 비슷하게 생겼냐?"하고 말할 것이다. 그러나 "정말? 어떻게 아는데? 혹시 일부분만 잘 보면 평면하고 똑같을지 몰라."하고 따지면 어떻게 설명할지 난감해진다. 이럴 때 다음과 같이 설명하면 된다.

자 구면의 일부분이 평면의 일부분과 똑같이 생겼다면, 이 똑같다는 말은 구면 부분의 각 점을 평면에 1대1로 대응시킬 수 있어서, 이 대응에 따라 비교해 보면 두 곡면의 차이를 느낄 수 없다는 말이 된다. 따라서 특히 두 점 사이의 거리, 곡선의 길이, 직선(가장 짧은 선), 그리고 넓이 등이 모두 같은 값을 가지고 서로 대응되게 된다. 자 이제 서로 일치하는 이 영역 안에 놓인 삼각형을 생각해 보자. 이 삼각형은 세 꼭지점과 이 세 점을 잇는 직선(구면에서는 직선이 대원이다)으로 이루어져 있다. 만일 이 대응이 모든 것을 보존한다면, 두 곡면 위에서 세 꼭지점의 각의 크기도 같고 세 변의 길이도 같으며 넓이 또한 같아야 한다. 그런데 이 넓이의 공식을 보면 과연 그럴 수가 있는가? 평면 삼각형의 내각의 합은 π인데 구면 삼각형의 내각의 합은 π보다 크다. 그러니까 구면의 어떤 삼각형도 평면삼각형과 같은 꼭지각과 변을 가질 수 없다. 그러니까 대우에 의하여 구면의 어떤 부분도 평면의 일부분과는 똑같은 모양을 하고 있지 않다.

이렇게 대우를 써서 설명하는 데는 똑같은 모양이라면 구체적으로 같아지는 길이, 각, 넓이와 같은 양(quantity)이 결정적인 역할을 하고 있음을 알 수 있다. 이렇게 서로 다른 대상이더라도 모양만 같으면 같은 값을 갖는 양을 기하의 불변량(invariant)라고 부른다. 기하학은 다루는 대상의 불변량을 연구하는 학문이라고 해도 된다. 이런 불변량은 특히 미분기하학(differential geometry)이나 위상기하학(topology)에서 큰 역할을 한다.

2.2 구면 위의 직선

이 절의 목표

1. 구면 위의 두 점을 잇는 가장 짧은 곡선은 대원이다.
2. 이와 같은 대원의 성질을 유클리드 평면에서와 같이 두 가지 방법으로 알아본다.

들어가기

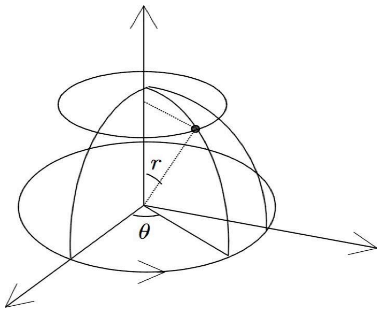
구면 위에서 가장 기본이 되는 곡선은 대원이다. 이 대원은 구면 위에서 직선의 역할을 한다. 이것은 무슨 뜻인가? 간단히 말하면 대원은 구면 위에서만 생각할 때 두 점 사이에서 최단거리를 주는 곡선이다. 이 말을 자세히 알아보자.

우선 구면 위에 두 점이 주어졌을 때, 구면 위에서 이 두 점 사이의 거리란 무엇인가? 우리가 거리를 이야기할 때는 주어진 두 점 가운데 한 점에서 출발하여 다른 점에 도달할 때 걸리는 최단 시간 또는 (단위속력으로 움직인다고 생각하고) 가장 짧은 길(道;path)의 길이를 말한다. 따라서, 구면 위에서의 두 점 사이의 거리는 구면 위를 움직여 한 점에서 다른 점으로 가는 길의 길이 가운데 가장 짧은 것의 길이를 말한다.

2.2.1 구면의 직선 (1)

위에서 한 말은 구면 위에서 두 점을 잇는 길(곡선) 가운데 두 점 사이의 거리와 같은 길이를 갖는 것은 대원의 호뿐이라는 뜻이다. 이러한 사실은 어떻게 확인하여 볼 수 있는가? 미적분을 조금 사용하면 쉽게 보일 수 있다. 우선, 주어진 두 점 사이의 거리는 구면을 회전하여도 변하지 않으므로 또, 구면을 회전하여도 대원은 계속 대원임에 변함이 없으므로 (질문: 왜 이 사실이 중요한가?) 구면을 적당히 회전하여 주어진 두 점 가운데 하나가 북극에 위치하고 있다고 하고 이 경우에 대하여만 확인하여 보아도 충분하다.

미적분을 사용하려면 구면 위에 좌표가 필요하다. 구면 위의 좌표는 경도와 위도를 사용하는 것이 가장 편리하다. 다음 그림에서와 같이 단위 구면 위의 북극점을 N 이라고 하고 위도는 북극에서부터 재고, 경도는 한 경선을 고정한 다음 북극 위에서 내려다볼 때 시계 반대방향으로 잰다고 하자. 위도는 $0 \leq r \leq \pi$ 로 나타내고, 경도는 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 로 나타내기로 한다.



이 구면에서 위도 및 경도 (r_0, θ_0) 로 나타내어지는 점을 $\mathbf{p}$ 라 할 때, 점 N 에서 출발하여 점 $\mathbf{p}$ 에 도달하는 미 분가능한 곡선 $c(s) = (x(s), y(s), z(s))$ $(s \in [a, b])$ 를 생각하여 보자. 즉 $c(a) = N$, $c(b) = \mathbf{p}$ 이다. 이제 이 곡선의 길이는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$c\text{의 길이} = \int_a^b \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2 + z'(s)^2} ds$$

이제 각 점 $c(s)$ 의 위도와 경도를 각각 $r(s)$, $\theta(s)$ 라고 나타내기로 하면 다음 관계가 있다.

$$x(s) = \sin r(s) \cos \theta(s), \quad y(s) = \sin r(s) \sin \theta(s), \quad z(s) = \cos r(s).$$

이를 써서 피적분함수를 계산하여 보면

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} = \sqrt{(r')^2 + (\theta')^2 \sin^2 r} \geq |r'| \geq r'$$

이 성립한다. 따라서

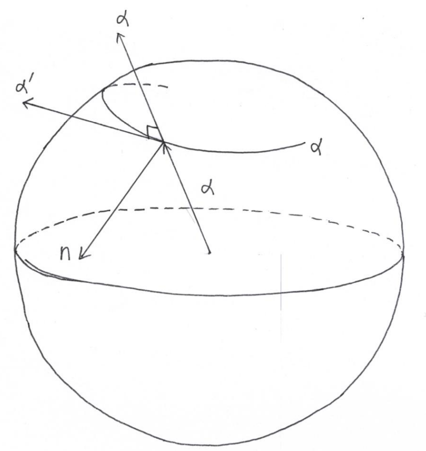
$$c\text{의 길이} \geq \int_a^b r'(s)\, ds = r(b) - r(a) = \text{점 } \mathbf{p}\text{의 위도} = \text{호 } N\mathbf{p}\text{의 길이}$$

가 성립한다. 이 부등식에서 등호가 성립하는 때는 $\theta' = 0$ 일 때뿐이며 이는 c 가 대원의 호 $N\mathbf{p}$ 와 일치할 때이다. 즉 c 의 길이가 가장 짧아질 때는 c 의 궤적이 대원일 때뿐임을 알 수 있다.

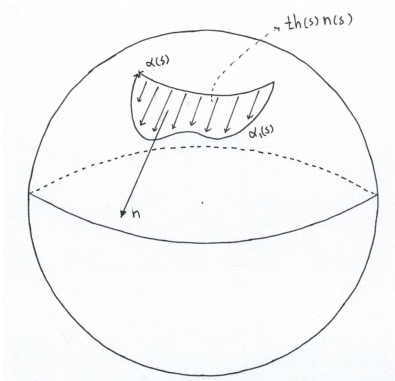
2.2.2 구면의 직선 (2)

평면의 경우처럼 구면에서도 미분법을 사용하여 두 점을 잇는 가장 짧은 곡선에 대하여 계산하여 보자.

구면 위의 서로 다른 두 점을 잇는 미분가능한 곡선을 $\alpha(s)$라고 하자. 특히 이 곡선의 parameter s를 $\|\alpha'(s)\| \equiv 1$ 되도록 잡았다고 하자. $\alpha(s)$의 속도벡터 $\alpha'(s)$와 구면의 법벡터인 위치벡터 $\alpha(s)$를 써서 구면 위에서 곡선의 법벡터를 $\mathbf{n}(s) = \alpha(s) \times \alpha'(s)$라고 정의할 수 있다.



이제 각 점 $\alpha(s)$에서 $\mathbf{n}(s)$방향으로 대원을 따라 $th(s)$만큼 움직인 점을 $\alpha_t(s)$라고 부르기로 하자. 여기서 연속함수 $h(s)$는 $h(0) = h(a) = 0$이고 $(0, a)$ 위에서는 미분가능한 함수이다.



그러면

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha_t(s) = h(s)\mathbf{n}(s) \tag{2.6}$$

가 된다.

문제 위의 식 (2.6)이 성립하는 이유를 설명하여라.

평면의 경우와 같이 s에 대한 미분을 '′'으로 나타내기로 하면, 이 곡선 α_t의 길이

$$l(t) = \int_0^a |\alpha_t'(s)|\, ds = \int_0^a \sqrt{\alpha_t'(s) \cdot \alpha_t'(s)} ds.$$

는 $t = 0$일 때 최소값을 갖는다. 따라서 미분을 계산하면

$$\frac{d}{dt} l(t) = \frac{d}{dt} \int_0^a \sqrt{\alpha_t' \cdot \alpha_t'} ds = \int_0^a \frac{d}{dt} \sqrt{\alpha_t' \cdot \alpha_t'} ds = \int_0^a \frac{\frac{d}{dt}(\alpha_t' \cdot \alpha_t')}{2\sqrt{\alpha_t' \cdot \alpha_t'}} ds$$

이고

$$\frac{d}{dt}(\alpha_t'(s)) = \left(\frac{d}{dt}\alpha_t(s)\right)'$$

이므로 $t = 0$일 때,

$$0 = \frac{dl}{dt}(0) = \int_0^a \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\alpha_t') \cdot \alpha_0' ds = \int_0^a \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha_t\right)' \cdot \alpha' ds = \int_0^a (h\mathbf{n})' \cdot \alpha' ds.$$

그러므로

$$0 = \int_0^a (h'\mathbf{n} + h\mathbf{n}') \cdot \alpha' ds = \int_0^a h\, \mathbf{n}' \cdot \alpha' ds$$

가 된다. 유클리드의 경우 처럼 적당한 h를 생각해 보면 $\mathbf{n}' \cdot \alpha' \equiv 0$ 되지 않으면 안 된다.

이제 $\alpha' \cdot \mathbf{n} \equiv 0$이므로 양변을 s로 미분하여 보면

$$\alpha' \cdot \mathbf{n}' + \alpha'' \cdot \mathbf{n} = 0$$

이고 따라서 $\alpha'' \cdot \mathbf{n} \equiv 0$이 된다.

한편 $\alpha' \cdot \alpha' \equiv 1$의 양변을 미분하면 $\alpha'' \cdot \alpha' \equiv 0$를 얻으므로 α''은 α'과 $\mathbf{n}$ 모두와 수직하다. 따라서 α''은 α와 평행하지 않으면 안 된다.

이제 $\mathbf{n}$의 미분을 계산하여 보자.

$$\mathbf{n}' = (\alpha \times \alpha')' = \alpha' \times \alpha' + \alpha \times \alpha'' = \mathbf{0}$$

가 되므로 $\mathbf{n}$은 상수벡터이다. $\mathbf{n}$은 원점과 α를 잇는 직선과 항상 수직이면서 상수벡터이므로 α는 원점을 지나며 $\mathbf{n}$에 수직한 평면 위에 놓인다. 따라서 대원이 된다.

2.3 Cosine 법칙

이 절의 목표

1. 구면 삼각형의 cosine 법칙에 대하여 알아본다.
2. 쌍대 삼각형을 구성하고 쌍대 cosine 법칙을 알아본다.
3. sine 법칙을 알아본다.
4. 구면에서의 기하 문제를 풀어본다.

들어가기

유클리드 기하의 삼각형을 다루는 데 가장 유용한 공식이 삼각형의 cosine 법칙이다. 이 법칙은 피타고라스 정리의 일반화일 뿐만 아니라 내적의 성질이기도 하기 때문에 더욱 중요하다. 구면의 삼각형도 cosine법칙을 가지고 있다. 그것도 두 가지나 있다. 이 공식들은 유클리드 기하에서와 같이 유용한 공식이다. 구면에서 생기는 많은 문제를 해결하게 해 준다.

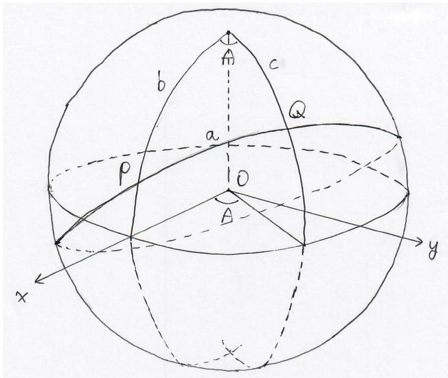
2.3.1 변에 대한 cosine 법칙

가장 먼저 공부할 cosine 법칙은 구면삼각형의 변에 대한 cosine 법칙이다.

정리 2.3.1 (변의 cosine 법칙)**.** 꼭지점이 각각 A, P, Q이고 대변이 a, b, c인 구면 삼각형에 대하여 다음이 성립한다.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

(증명)



위의 그림에서 삼각형의 꼭지점 A는 북극점이고, 점 P는 xz평면 위에 놓이도록 한다. 그러면

$$\vec{OP} = (\sin b, 0, \cos b), \quad \vec{OQ} = (\sin c \cos A, \sin c \sin A, \cos c)$$

이다. $a = \angle POQ$이므로

$$\cos a = \langle \vec{OP}, \vec{OQ} \rangle = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

이다. ■

문제 $\angle A = 60°$, $\angle b = 60°$, $\angle b = 90°$ 일 때 이 구면삼각형을 풀어라.

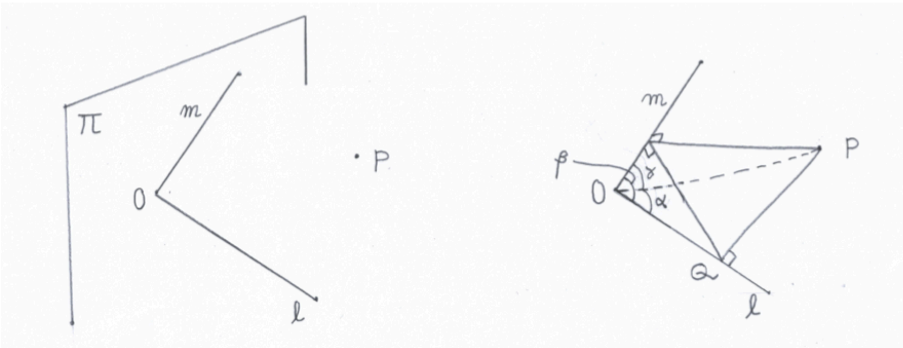
따름정리 2.3.2 (Pythagorean theorem)**.** 위에서 특히 $\angle A = \pi/2$이면 다음이 성립한다.

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

구면직각삼각형과 삼수선

3차원 유클리드 공간의 다음 그림에서, 직선 l 과 m 은 평면 π 에 있으며 점 O에서 만난다.

점 P 에서 평면 π 에 내린 수선의 발을 Q, 점 Q 에서 직선 m 에 내린 수선의 발을 R 이라고 하면, 직선 PR 은 직선 m 과 수직하다. (삼수선 정리가 주장하는



〈그림 2.1〉 삼수선

것이다). 이제, 평면 π 밖의 점 P 에 대하여, 직선 l 과 점 P 가 결정하는 평면은 평면 π 와 수직하다고 가정하자. 그러면 점 Q 는 직선 l 위에 있게 된다.

이제, $|OP| = 1, \angle QOP = \alpha, \angle QOR = \beta, \angle POR = \gamma$ 라고 하면, $|OQ| = \cos\alpha$ 이다.

직각삼각형 OQP 에서, $|OR| = \cos\alpha\cos\beta$ 이고, 직각삼각형 ORP 에서, $|OR| = \cos\gamma$ 이므로,

$$\cos\alpha\cos\beta = \cos\gamma$$

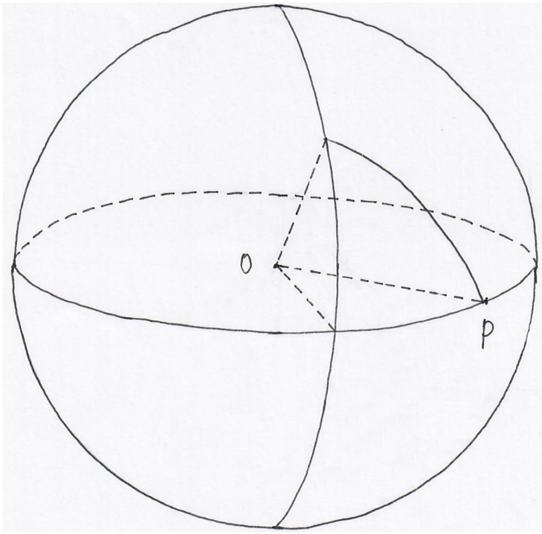
가 성립한다. 다음 그림에서 알 수 있듯이, 이것이 구면직각삼각형에 대한 피타고라스 정리이다.

2.3.2 쌍대구면삼각형과 각에 대한 cosine 법칙

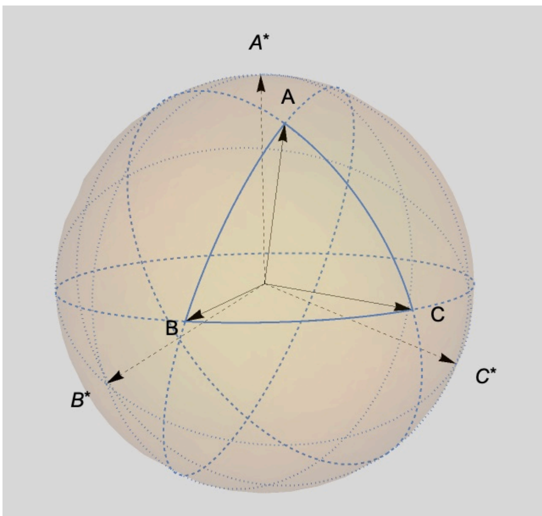
구면삼각형 $\triangle ABC$ 가 주어졌다고 하자. 이 삼각형의 변 BC를 이루는 대원을 품는 평면에 수직인 단위벡터 가운데 하나를 A^* 로 나타내기로 한다. 즉,

$$A^* = \frac{B \times C}{\sin a}, \quad B^* = \frac{C \times A}{\sin b}, \quad C^* = \frac{A \times B}{\sin c}$$

라고 정의한다.



〈그림 2.2〉 구면직각삼각형



이렇게 만들어진 구면삼각형 $\triangle A^*B^*C^* = {}^*\triangle ABC$를 $\triangle ABC$의 쌍대구면삼각

형 (dual spherical triangle) 이라 부른다. 이 쌍대구면삼각형의 꼭지점 A^*, B^*, C^* 의 대변을 각각 a^*, b^*, c^* 라고 부르자.

그러면 다음이 성립한다.

정리 2.3.3. 위와 같이 정의하면 $\triangle ABC$ 는 $^*\triangle ABC$ 의 쌍대구면삼각형과 합동이다. 즉,

$$A = \pm\frac{B^* \times C^*}{\sin a^*}, \quad B = \pm\frac{C^* \times A^*}{\sin b^*}, \quad C = \pm\frac{A^* \times B^*}{\sin c^*}.$$

(증명) 이제 $B^* \times C^*$ 가 A 와 평행함을 보이자.

$$B^* \times C^* \,/\!/\, (C \times A) \times (A \times B)$$

이므로 공식 $X \times (Y \times Z) = \langle X, Z\rangle Y - \langle X, Y\rangle Z$ 를 사용하면

$$(C \times A) \times (A \times B) = \langle C \times A, B\rangle A - \langle C \times A, A\rangle B = \det[A, B, C]\, A$$

가 되어 이 벡터는 A 와 평행하다. 그러므로

$$A = \pm\frac{B^* \times C^*}{\sin a^*}$$

가 성립한다. ■

이 정리의 계산을 잘 따라가 보면 삼각형의 꼭지점 벡터 A, B, C 가 순서대로 오른손 법칙을 만족시키면 이중 쌍대삼각형은 $^*(^*\triangle ABC) = \triangle ABC$ 이고, 꼭지점 벡터가 왼손 법칙을 만족시키면 이중 쌍대삼각형은 $^*(^*\triangle ABC) = \triangle(-A)(-B)(-C)$ 가 된다.

문제 다음 문제를 풀어라.

1. 위의 정리에서 사용된 다음 벡터 공식을 증명하여라.

$$X \times (Y \times Z) = \langle X, Z\rangle Y - \langle X, Y\rangle Z.$$

2. 삼각형의 꼭지점이 순서대로 오른손 법칙을 만족시킬 때와 왼손 법칙을 만족시킬 때의 이중 쌍대삼각형에 대한 설명을 확인하여라.

정리 2.3.4. 쌍대 구면삼각형의 꼭지각과 호각 사이에는 다음 관계가 있다.

$$A + a^* = A^* + a = B + b^* = B^* + b = C + c^* = C^* + c = \pi$$

(증명) 직접 계산하면

$$\begin{aligned} a^* &= \angle(B^*, C^*) = \angle(-A \times C, A \times B) \\ &= \pi - \angle(A \times C, A \times B) = \pi - A \end{aligned}$$

이다. 한편 쌍대삼각형에 이것을 적용하면

$$\pi = A^* + a^{**} = A^* + a$$

등과 같이 된다. ■

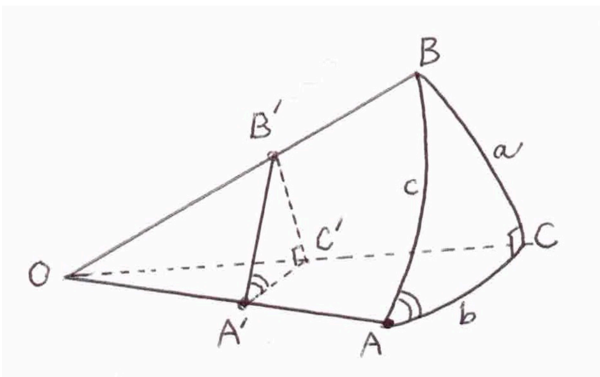
이를 사용하면 다음 cosine 법칙은 바로 증명된다.

따름정리 2.3.5 (각의 cosine 법칙)**.** 구면 삼각형에 대하여 다음이 성립한다.

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

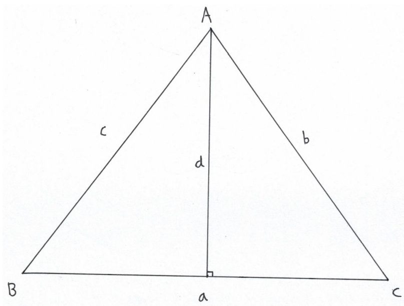
문제 [sine 법칙]

1. 다음 그림과 같이 $\angle C = \pi/2$인 직각삼각형에서 $\sin A = \sin a / \sin c$임을 보여라.



2. 위의 사실을 써서 다음 그림의 구면삼각형에서 다음이 성립함을 보여라.

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$



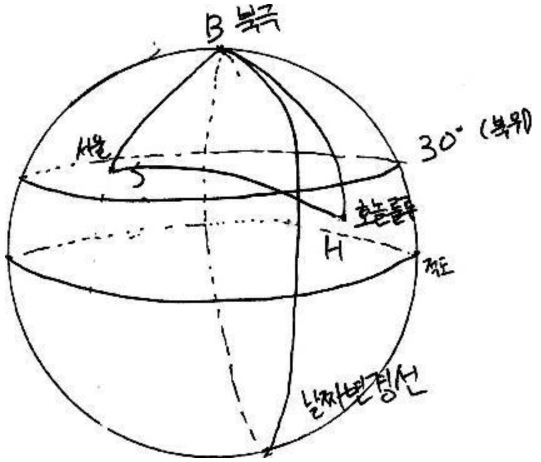
2.3.3 cosine 법칙의 활용: Jennings에서

구면 삼각법은 구면의 기하학에서 매우 편리하다. 예를 들어 “비행기로 서울을 출발하여 호놀룰루에 최단거리로 도착하려면 어느 방향으로 얼마 동안 여행하여야 하는가?”라는 문제를 생각하여 보자. (호놀룰루는 서울보다 남쪽에 위치한다. 그러니까 서울에서 호놀룰루로 갈 때는 정동 방위보다 북쪽을 향해서 출발하는가? 아니며 더 남쪽을 향해서 출발하는가? 라고 물어보면 바보라는 말을 들을까?)

지구 위에서 서울과 호놀룰루의 위치는 다음 자료를 사용하자.

	위도	경도
서울	북위 37.5°	동경 127°
호놀룰루	북위 21°	서경 158°

이 자료를 토대로 다음 그림과 같이 북극, 서울 및 호놀룰루를 연결하는 구면삼각형을 그리자.



이 삼각형의 꼭지점을 각각 B, S, H 라고 하면 서울을 지나는 경선과 날짜변경선 사이의 각은 $53°$ 이고 날짜변경선과 호놀룰루를 지나는 경선 사이의 각은 $22°$ 이므로 $\angle B = 75°$ 이다. 한편 북극과 서울사이의 호각은 $h = 90° - 37.5° = 52.5°$ 이고, 북극과 호놀룰루 사이의 각은 $s = 90° - 21° = 69°$ 이다. 우선 서울과 호놀룰루 사이의 호각을 구하자.

$$\begin{aligned}\cos b &= \cos 52.5° \cos 69° + \sin 52.5° \sin 69° \cos 75° \\ &\approx (0.60876)(0.35837) + (0.79335)(0.93358)(0.25882) \\ &= 0.40986\end{aligned}$$

이므로,

$$b \approx 65.804° \approx 1.1485 \text{ (rad)}.$$

지구의 반지름이 약 $6,400$km 이므로, 두 도시 사이의 거리는 약

$$6,400 \times 1.15 = 7,360\text{km}$$

임을 알 수 있다. 방향을 구하기 위하여 변의 cosine 법칙을 다시 한 번 쓰면,

$$\cos 69° = \cos 52.5° \cos 65.8° + \sin 52.5° \sin 65.8° \cos \angle S$$

이 성립한다. 따라서 $\cos \angle S = 0.013518$ 을 얻게 되고 따라서 $\angle S \approx 89.225°$ 이다.

문제 대서양에서 버뮤다 삼각 수역은 플로리다의 마이애미, 푸에르토리코의 산 후안 및 버뮤다 제도의 해밀턴을 잇는 삼각형 모양의 수역이다. 다음 자료를 토대로 이 수역의 넓이를 구하여라. (힌트: 북극점을 추가하여 삼각형들을 풀어라.)

마이애미	북위 $25°46'$	서경 $80°12'$
산 후안	북위 $18°29'$	서경 $66°08'$
해밀턴	북위 $32°18'$	서경 $64°47'$

문제 다음 과정을 따라 한 모서리의 길이가 5cm인 정 12면체의 한 꼭지점에서 중심 O 까지의 거리를 구하여라.

1. 정 12면체의 한 면 F를 잡고 이 정12면체의 외접구 S를 생각하자. S 위에서 F의 다섯 꼭지점을 대원으로 이어 만든 구면오각형의 중심을 C라고 한다. 이 구면오각형의 한 변을 AB라 하자. 구면 위에서 구면삼각형 $\triangle CAB$를 풀어라.
2. 구면 위에서 호 AB의 중심각의 cosine값을 각의 cosine 법칙으로 구하여라.
3. 호 AB의 중심각이 곧 $\angle AOB$이므로 평면 cosine 법칙을 써서 선분 OA의 길이를 구하여라.

2.4 구면의 움직임

이 절의 목표

1. 단위구면의 등거리사상은 어떤 꼴인가 알아 보자.
2. 단위구면의 등거리사상을 주는 직교변환과 직교변환군 $O(3)$의 모양을 알아보자.

들어가기

구면은 동그랗게 생겨서 마음대로 돌릴 수 있다. 그리고 이렇게 돌려도 구면은 바뀐 것 없이 그대로 있는 것처럼 보인다. 이러한 등거리 사상은 얼마나 있는가? 그리고 이것을 어떻게 보기 좋게 사용하기 좋게 나타낼 수 있는가?

구면은 평면보다 작아 보이지만 실제로 평면과 많이 닮았다. 구면의 등거리 사상은 평면의 등거리 사상만큼 많이 있다. 2차원 공간으로 평면만큼 많은 등거리 사상을 가진 공간은 많지 않아서 근본적으로 평면, 구면(또는 사영평면)과 쌍곡평면뿐이다.[3] 이 세 공간은 서로 다르면서도 상호 보완적인 공간으로 고전 기하학 공부의 중심을 이루는 공간이다. 고전 기하학에서는 평면의 기하학을 유클리드 기하학, 나머지 두 공간의 기하학을 비 유클리드 기하학이라고 부른다.[4]

2.4.1 구면의 등거리변환

구면의 등거리 변환을 쉽게 이해하기 위하여 구면 $\mathbb{S}^2$를 $\mathbb{E}^3$에서 원점에 중심을 둔 단위 구면이라고 이해하기로 하자. 이제 $\mathbb{S}^2$의 모든 점은 원점에서 거리 1만큼

3) 나머지 공간들도 나중에 공부한다.

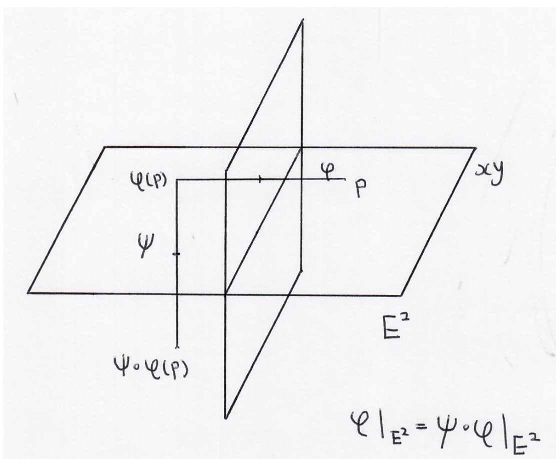
4) 실제로는 구면 대신에 구면의 각 점을 그 대칭점과 같다고 보아 생기는 사영평면의 기하학을 비 유클리드 기하학이라고도 한다. 이에는 장단점이 있지만 공간의 위상적 입장에서 보는가, 기하학적 공리의 입장에서 보는가에 따라 서로 다른 쪽을 선호한다. 그러나 근본적으로는 차이가 없다.

떨어진 곳에 위치한다. 그리고 $\mathbb{S}^2$ 위의 두 점 사이의 거리는 이 두 점을 원점에서 바라보아 만드는 중심각이다.

이제 $\mathbb{E}^3$ 의 직교변환 전체인 $O(3)$ 를 생각하자. $O(3)$ 의 원소는 $\mathbb{E}^3$ 에서 거리를 보존하는 선형변환이므로 원점에서부터의 거리가 1 인 점들의 모임인 $\mathbb{S}^2$ 의 모든 점들을 자기 자신 위의 점으로 보낸다. 또 $\mathbb{S}^2$ 위의 점으로 오는 점들도 자기 자신의 점 밖에 없다. 따라서 $\mathbb{S}^2$ 에서 $\mathbb{S}^2$ 로의 1대1 대응을 이룬다. 한편 직교변환은 모든 거리를 보존하므로 구면 위의 임의의 두 점 사이의 거리도 보존할 뿐만 아니라 이 두 점을 잇는 대원의 길이도 보존한다. 따라서 $O(3)$ 의 모든 원소는 $\mathbb{S}^2$ 의 등거리 사상이 된다.

한 가지 조심할 것은 $O(3)$ 의 원소 가운데 서로 다르면서도 $\mathbb{S}^2$ 위에서는 같은 변환처럼 보이는 경우는 없는가 하는 것을 확인하여야 한다. 왜 이런 것을 생각해 보아야 하는가?

문제 다음 그림과 같이 $\mathbb{E}^3$ 의 대칭이동 가운데 xy 평면을 자기자신으로 보내는 대칭이동을 생각하면 이것은 xy 평면에서는 직선에 대한 대칭이동이 된다. 이 때, $\mathbb{E}^3$ 의 대칭이동으로서 xy 평면에서 같은 대칭이동이 되는 것은 두 개씩 있음을 설명하여라.



이 문제에서 보듯이 전체에서는 서로 다른 변환들이 그 일부분에서만 보면 같은

변환처럼 보이는 경우가 많이 있다. 혹시 이럴지도 모르니까 이럴 수 있다는 것을 염두에 두고 계산하여야 한다. 우리는 나중에 이러한 예를 더 보게 될 것이다.

다행히도 우리 경우에는 이런 일이 없다.

도움정리 2.4.1. $O(3)$의 원소가 서로 다르면 $\mathbb{S}^2$ 위에서도 서로 다른 변환이 된다.

(증명) $O(3)$의 두 원소 A, B를 생각하자. 대우를 증명하기 위하여 A와 B가 $\mathbb{S}^2$ 위에서 보면 같은 사상처럼 보인다고 하자. 그러면 $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2$에 대하여

$$A\mathbf{x} = B\mathbf{x} \text{ 이므로, } \mathbf{x} = A^{-1}B\mathbf{x}$$

가 항상 성립하여, $T = A^{-1}B$는 $\mathbb{S}^2$ 위의 모든 점을 자기 자신으로 보낸다. 이제 $\mathbb{E}^3$의 임의의 점 $\mathbf{p}$에 대하여

$$T(\mathbf{p}) = T(\|\mathbf{p}\|\frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}) = \|\mathbf{p}\|T(\frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}) = \|\mathbf{p}\|\frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} = \mathbf{p}$$

이므로 $T = A^{-1}B = I$이다. 그러므로 $A = B$가 된다. ■

이제 $O(3)$의 원소가 $\mathbb{S}^2$의 등거리사상 전부임을 보이자.

정리 2.4.2. T가 $\mathbb{S}^2$의 등거리사상이면 T는 $O(3)$의 적당한 원소를 $\mathbb{S}^2$에 제한하여 본 것과 일치한다.[5)]

(증명) 우선 $\mathbb{S}^2$의 북극점을 N이라 하고 TN이 N과 다르다고 하자. $N \times TN$ 방향을 축으로 하여 $\angle(TN, N)$만큼 회전하는 직교변환을 R_1이라고 하면 $S_1 = R_1 \circ T$는 N을 고정시킨다. 이제 적도 위에서 서로 수직인 단위벡터 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$를 잡자.

N을 고정시키는 S_1은 N에서 $\pi/2$만큼 떨어진 적도 위의 점을 모두 다시 적도의 점으로 보낼 수 밖에 없으므로 $S_1(\mathbf{e}_1)$은 적도 위의 점이다. 위에서와 마찬가지 방법으로 ON을 축으로 하고 $S_1(\mathbf{e}_1)$을 $\mathbf{e}_1$으로 보내는 회전변환을 R_2라고 하면 $S_2 = R_2 \circ S_1$은 직교변환으로서 N과 $\mathbf{e}_1$을 고정시킨다. 따라서 S_2는 N과 $\mathbf{e}_1$에서 각각 $\pi/2$만큼 떨어진 $\mathbf{e}_2$를 다시 그런 점으로 보내야 하는데 그런 점은 $\pm\mathbf{e}_2$

5) 이럴 때 T가 $O(3)$의 원소로 확장된다(extend to)고 한다.

뿐이다. 그러므로 필요하면 $O, N, \mathbf{e}_1$ 을 품는 평면에 대한 대칭이동을 S_2 에 더하여 $S_2(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2$ 라고 하기로 하자.

문제 구면에서 위의 세 점 $N, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 를 고정시키는 등거리 변환은 단위사상뿐임을 다음과 같이 보여라.

1. 등거리 변환은 한 점에서 한 대원까지의 거리를 보존함을 보여라.
2. N 을 지나는 대원은 위의 S_2 에 의하여 보존됨을 보여라. 또, $\mathbf{e}_1$ 을 지나는 대원도 마찬가지로 보존됨을 보여라.
3. 이 두 대원의 교점인 두 점도 S_2 에 의하여 이 두 점 가운데 하나로 보내진다. 실제로 이 점들이 S_2 에 의하여 고정됨을 보여라.

이 문제를 풀면 $S_2 = R_2 \circ R_1 \circ T$ 는 단위사상이고 따라서 I 를 $\mathbb{S}^2$ 위에 제한시킨 사상이 된다. 따라서 T 는 직교변환 $R_1^{-1} \circ R_2^{-1} \circ S_2$ 를 $\mathbb{S}^2$ 에 제한시킨 사상이다. ■

2.4.2 $O(3)$ 의 모양

보통 역행렬을 갖는 3×3 실수 행렬 전체의 집합을 $Gl(3)$ 로 나타낸다. 이 집합은 행렬의 덧셈과 실수배에 대하여 벡터공간을 이루며 행렬의 곱셈까지 더하여 보통 대수(algebra)라고 하는 대수적 구조를 가진다. 이를 일반선형군(general linear group)이라고 부른다.

$O(3)$ 는 $Gl(3)$ 의 원소들 가운데 직교행렬들만 모은 것이다. A 가 직교행렬이란 $A^T A = I$ 를 만족시킨다는 뜻이었다. $O(3)$ 는 특히 행렬의 곱셈에 대하여 군(group) 구조를 가진다.[6] $O(3)$ 를 직교군(orthogonal group)이라 부른다. $O(3)$ 의 행렬들에 대하여 함수 $\det : O(3) \to \mathbb{R}$ 을 생각해 보자.

$$1 = \det I = \det(A^T A) = (\det A^T)(\det A) = (\det A)^2$$

6) 군이란 무엇인가? 군은 자신 사이에서 결합법칙을 만족시키는 곱셈을 할 수 있는 대상들을 모은 것으로 자신들 사이에 단위원이 있고, 또 역원을 찾을 수 있는 것이다. 군에 대하여 더 알아보려면 대수학 교과서를 읽어볼 것.

이 되므로 $\det A = \pm 1$ 이다. 여기서 $\det A = 1$ 인 행렬들 전체를 $SO(3)$ 로 나타낸다. 즉,

$$SO(3) = \{A : \det A = 1\} = \det{}^{-1}(\{1\})$$

이고, det는 연속함수이므로 $SO(3)$ 는 $O(3)$ 안에서 열린집합이 된다. $SO(3)$ 로 자체로 군이 된다. 그리고

$$O(3) \setminus SO(3) = \det{}^{-1}(\{-1\})$$

도 열린집합이므로 $O(3)$ 는 두 개의 연결되지 않은 성분으로 나뉘며 $SO(3)$ 는 그 중 하나이다.[7)]

정리 2.4.3. $SO(3)$ 의 원소는 $\mathbb{E}^3$ 의 원점을 지나는 한 직선을 축으로 한 회전이다.

이 정리의 증명은 다음 도움정리를 필요로 한다.

도움정리 2.4.4. $SO(3)$ 의 임의의 원소 A 는 *1*을 *eigenvalue* 로 갖는다.

(증명) 이 도움정리의 다음 증명 방법은 기교가 필요하다. 우리는 $\det(A - I) = 0$ 임을 증명하려고 한다. 우선 A 는 직교행렬이라 $\det A^T = \det A = 1$ 이므로

$$\det(A - I) = \det A^T(A - I) = \det(I - A)^T = \det(I - A)$$

가 성립한다. 3×3 행렬들이라서 $\det(I - A) = -\det(A - I)$ 가 되어야 하므로 $\det(A - I) = 0$ 이다. ■

(정리 2.4.3의 증명) $A \in SO(3)$ 라고 하자. 위의 도움정리에 의하여 A 는 1을 eigenvalue로 하는 eigenvector $\mathbf{v}$ 를 갖는다. 이 때 $\|\mathbf{v}\| = 1$ 이라고 하여도 된다. 이제 원점을 지나며 $\mathbf{v}$ 와 수직인 평면 α 를 잡으면 A 는 α 위의 점을 α 로 보낸다. 이제 α 의 orthonormal basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 를 잡아 $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 가 오른손 법칙을 만족시키는 $\mathbb{E}^3$ 의 orthonormal basis가 되도록 하자. 그러면 이 basis에 대하여 A 는 다음과 같은 꼴의 행렬이 된다.

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R \end{pmatrix}$$

7) $O(3) \setminus SO(3)$ 는 군이 아니다. 그 속에는 단위원 I 가 없다. 다른 것이 단위원 역할을 하지도 못하고, 곱셈에 관하여 닫혀있지도 않다.

그리고 직교행렬 R은 $\det R = \det A = 1$이므로 α 위의 회전을 나타내는 행렬이 된다. ■

문제 이 정리의 증명의 detail을 확인하여라.

2.5 Stereographic projection

이 절의 목표

1. Stereographic projection에 의하여 구면에 좌표를 주는 방법을 알아 본다.
2. Stereographic projection이 가지는 기하학적 성질들을 알아본다.
3. 구면의 움직임을 stereographic projection으로 나타내어 본다.

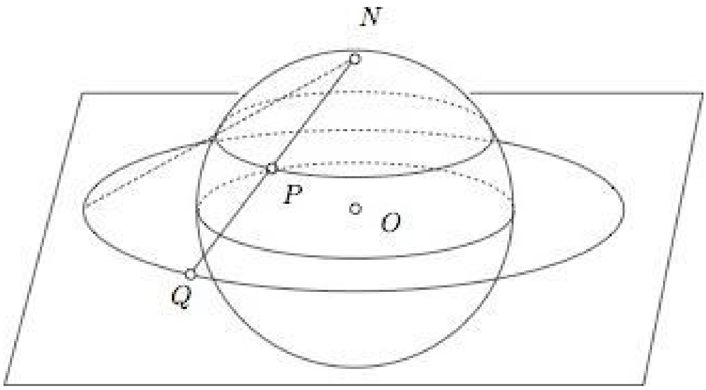
들어가기

구면은 매우 많이 사용되는 곡면이어서 이를 다루는 방법도 많다. 이를 잘 사용하려면 적절한 좌표를 주어야 하며 우리는 이미 데카르트 좌표 외에도 구면좌표를 잘 사용했다. 그러나 이러한 좌표보다 어떤 면에서 훨씬 활용이 많이 되는 좌표가 하나 더 있다.

Stereographic projection은 북극점을 뺀 구면을 복소평면 $\mathbb{C}$로 보게 해 주며 이에 의하여 복소수를 사용하는 많은 이론들을 구면에서도 사용할 수 있게 해 준다. 이러한 장점때문에 다른 좌표보다 복잡함에도 활용도는 높다.

2.5.1 Stereographic projection과 각의 크기

단위구면을 $\mathbb{E}^3$ 안에 중심이 원점에 오게 놓자. 그리고 북극점 $N = (0, 0, 1)$을 정하고 이 점을 지나는 직선이 구면을 점 P에서 만나고 xy평면을 점 Q에서 만날 때, 점 P를 점 $Q = \Phi(P)$에 대응시킨다.



이 대응 Φ를 구면의 stereographic projection 또는 입체사영이라고 부른다.

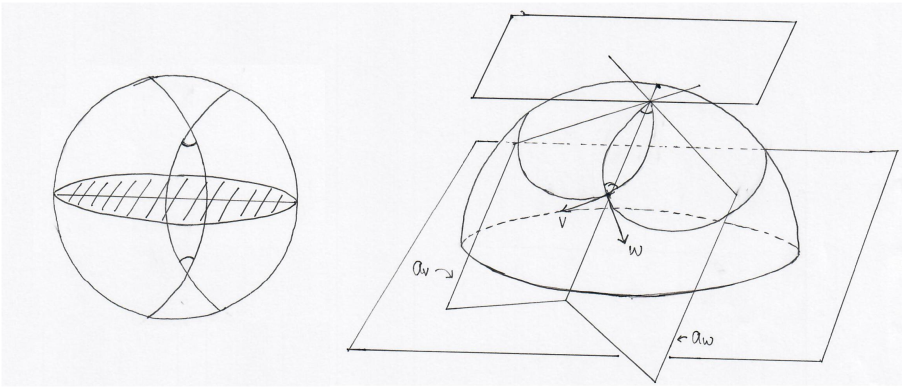
입체사영의 가장 중요한 성질은 다음 정리이다.

정리 2.5.1. 구면의 입체사영은 각을 보존한다.

(증명) 이 정리에 대한 간단한 기하학적 증명이 있다. 다음과 같이 생각해 보자. 구면 위의 점 $P \neq N$ 에서 임의의 두 접벡터 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$를 생각하여 보자. $\mathbf{v}$를 품으며 P와 N을 지나는 평면 $\alpha_{\mathbf{v}}$가 구면과 만드는 교선인 원 $C_{\mathbf{v}}$와 $\mathbf{w}$ 를 품으며 P와 N을 지나는 평면 $\alpha_{\mathbf{w}}$가 구면과 만드는 교선인 원 $C_{\mathbf{w}}$는 두 점 P와 N에서 만난다. 이 때 P와 N에서 두 원이 만나는 각의 크기는 같다. 이 사실은 간단히 선분 PN을 수직 이등분하는 평면은 원의 중심 O를 지나며 이 두 원은 이 평면에 대하여 대칭이라는 사실에서 각 P와 각 N도 서로 대칭이 되어 각의 크기가 일치한다.

따라서 우리는 점 N에서 두 원이 만나 만드는 각의 크기와 이 원들의 입체사영이 Q에서 만드는 각의 크기가 같다는 사실을 보이면 된다.

이제 N에서 두 원이 만드는 각은 N에서 구면에 접하는 평면에서 보면 이 접평면과 평면 $\alpha_{\mathbf{v}}$의 교선이 이 접평면과 평면 $\alpha_{\mathbf{w}}$의 교선과 이루는 각이다. 한편 점 Q에서 입체사영된 곡선이 만드는 각의 크기는 xy평면과 평면 $\alpha_{\mathbf{v}}$의 교선이 xy평면과 평면 $\alpha_{\mathbf{w}}$의 교선과 이루는 각이다. 이제 N에서의 구면의 접평면과 xy 평면은 서로 평행하므로 이 두 각은 같은 크기이다. ■



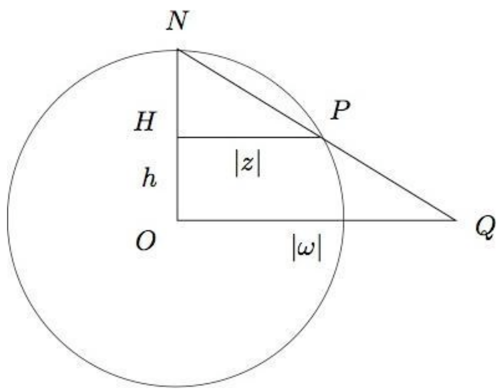
2.5.2 좌표에 의한 계산

위의 stereographic projection에서 점 P와 점 Q의 좌표 사이의 관계를 알아보자.

각 점의 좌표를

$$P = (x, y, h) = (z, h), \quad Q = (u, v, 0) = (\omega, 0)$$

로 나타내기로 하자. 위의 그림을 N, O, P를 지나는 평면으로 잘라서 보면 다음 그림과 같다.



이 그림의 두 삼각형 $\triangle NHP$와 $\triangle NOQ$는 닮은꼴이므로

$$(1-h) : |z| = 1 : |\omega|$$

가 성립한다. 한편 $h^2 + |z|^2 = 1$이다. z와 ω는 원점에서 서로 같은 방향에 놓인 점이므로 하나는 또 하나의 양수배가 된다. 위에서 $(1-h)|\omega| = |z|$이므로

$$\omega = \frac{z}{1-h} \quad \text{즉} \quad (u,v) = \Phi(x,y,h) = \left(\frac{x}{1-h}, \frac{y}{1-h}\right)$$

가 된다.

이를 $h^2 + |z|^2 = 1$에 대입하여 계산하면

$$h^2 + (1-h)^2|\omega|^2 = 1 \quad \text{즉} \quad (h-1)\big((1+|\omega|^2)h - (|\omega|^2 - 1)\big) = 0$$

을 얻는다. 따라서

$$h = \frac{|\omega|^2 - 1}{|\omega|^2 + 1} \quad \text{이고,} \quad 1 - h = \frac{2}{|\omega|^2 + 1}$$

이 된다. 그러므로

$$z = \frac{2\omega}{|\omega|^2 + 1}$$

를 얻게 되고 이를 써서 계산해 보면

$$(x,y,h) = \Phi^{-1}(u,v) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{-1+u^2+v^2}{1+u^2+v^2}\right)$$

를 얻는다.

2.5.3 기하학적 특징

Stereographic projection의 특징은 각을 보존한다는 것 외에도 원과 직선을 보존한다는 것이다. 이 말은 조금 조심하여야 하는데 원을 원으로 직선을 직선으로 보존한다는 것이 아니라—구면 위에는 직선이 없다—구면의 (소)원들을 평면의 원 또는 직선으로 보내며 그 반대 방향으로도 마찬가지로 대응시킨다는 것이다.

정리 2.5.2. $\mathbb{S}^2$의 도형 C에 대하여 다음은 동치이다.

1. C는 $\mathbb{S}^2$의 소원이다.

2. C의 *stereographic projection*에 의한 상은 원 또는 직선이다.

(증명) ($\Leftarrow$) C의 상이 원이라고 하면 ON을 축으로 적절히 회전하여 이 원의 중심이 x축 위에 놓인다고 가정하여도 된다. 이 중심을 x_0 반지름을 r_0라 하면 이 원의 방정식은 $|\omega - x_0| = r_0$가 된다. 이의 양변을 제곱하여 전개하면 동치인 식

$$|\omega|^2 - x_0(\omega + \bar{\omega}) + x_0^2 - r_0^2 = 0$$

을 얻는다. 따라서

$$\begin{aligned}(|\omega|^2 - 1) - \frac{r_0^2 - x_0^2 - 1}{r_0^2 - x_0^2 + 1}(|\omega|^2 + 1) &= \frac{2}{r_0^2 - x_0^2 + 1}(|\omega|^2 + x_0^2 - r_0^2) \\ &= \frac{2x_0}{r_0^2 - x_0^2 + 1}(\omega + \bar{\omega})\end{aligned}$$

가 된다.

$$z = \frac{2\omega}{|\omega|^2 + 1}, \quad \bar{z} = \frac{2\bar{\omega}}{|\omega|^2 + 1}$$

이므로

$$\begin{aligned}h = \frac{|\omega|^2 - 1}{|\omega|^2 + 1} &= \frac{r_0^2 - x_0^2 - 1}{r_0^2 - x_0^2 + 1} + \frac{x_0}{r_0^2 - x_0^2 + 1}\frac{\omega + \bar{\omega}}{|\omega|^2 + 1} \\ &= \frac{r_0^2 - x_0^2 - 1}{r_0^2 - x_0^2 + 1} + \frac{x_0(z + \bar{z})}{2(r_0^2 - x_0^2 + 1)}\end{aligned}$$

이 식은 $h = a + b(z + \bar{z}) = a + b'x$ 꼴이라서 평면의 방정식이고 구면 위에서 이를 만족시키는 도형은 소원이다.

C의 상이 직선이라면 C는 구면 위에서 이 직선과 N을 잇는 평면 위에 놓인다. 이는 N을 지나는 소원이다.

($\Rightarrow$) 역으로 C가 소원이라면 C 위에서 서로 다른 세 점 P_1, P_2, P_3를 잡자. Stereographic projection에 의한 이 점들의 상을 Q_1, Q_2, Q_3라 하면 이 세 점도 서로 다르고 따라서 이 세 점을 지나는 원 또는 직선이 단 하나 있다. 이 원 또는 직선은 구면 위의 소원에 대응되고 그 소원은 P_i들을 품고 있어야 하므로 이것은 C이다. 즉 C의 상은 Q_i를 품는 원 또는 직선이다.

2.6 $\mathbf{SU}(2)$ 와 $\mathbf{SO}(3)$

이 절의 목표

1. 앞 절에서 공부한 구면의 움직임은 $\mathbf{SO}(3)$ 라는 재미있는 대상을 만든다. 그러나 복소수를 생각하면 이와는 또 다른 재미있는 군 $\mathbf{SU}(2)$ 를 보며주며 이 둘은 매우 밀접한 관계에 있다.

2. $\mathbf{SU}(2)$ 를 사용하려면 복소분수함수의 계산을 해 봐야한다.

3. $\mathbf{SO}(3)$ 와 $\mathbf{SU}(2)$ 의 관계를 통해서 $\mathbf{SO}(3)$ 의 모양이 3차원 구면과 밀접한 관계에 있음을 알아본다.

들어가기

우리가 생각하는 것은 $\mathbf{S}^2$ 이다. 이것은 앞에서 공부한 입체사영에 의해서 한 점 N 만 제외하면 가우스평면 즉, 복소수평면 $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$과 1대1로 대응된다. 그리고 이 대응은 두어가지 좋은 성질을 가지고 있었다. 우리는 이 $\mathbb{S}^2$ 위에서 생각한 (向을 보존하는) 등거리 사상들을 모두 모은 것이 $\mathbf{SO}(3)$ 와 같다는 것을 알고 있다. 우리는 이 $\mathbf{SO}(3)$ 를 $\mathbb{R}^3$ 의 직교행렬들로 나타내는 방법 말고 또 다른 방법을 하나 써서 나타내봄으로써 $\mathbf{SO}(3)$ 의 모양을 조금 더 잘 알아보려고 한다. (즉, 직교행렬들을 사용하면 계산은 편리하지만 그 전체의 모양은 전혀 보여주지 못한다.)

2.6.1 특수유니터리군

이를 위하여 새로운 군을 하나 생각한다. 특수유니터리군(special unitary group) 이라고 불리는 이 군은 복소수를 써서 나타낸다:

$$\mathbf{SU}(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\}.$$

즉 이 군은 $\mathbf{Gl}(2, \mathbb{C})$ 의 부분군으로 복소내적에 대해서 직교군을 생각하는 것과 같다. 특히 행렬식의 값이 1 이 되는 것을 모은 것이다. 우리는 이 군이 3차 직교군

SO(3) 와 밀접한 관계가 있음을 알아볼 것이다. 마지막에 가면 우리는 이 공간 **SU**(2) 가 4차원 유클리드 공간 안의 삼차원 구면 $\mathbb{S}^3$ 와 같다고 볼 수 있음을 설명한다.

문제 복소벡터 (z_1, z_2) 와 (w_1, w_2) 에 대한 내적을 다음과 같이 줄 때 **SU**(2) 의 각 행은 정규직교 바탕벡터를 이룸을 보여라: $(z_1, z_2) \cdot (w_1, w_2) := z_1\overline{w}_1 + z_2\overline{w}_2$.

우선 이 군 **SU**(2) 는 가우스평면 $\mathbb{C}$ 에서의 변환으로 생각할 수 있다. 어떻게 생각하는가는 다음과 같다: 행렬 $A \in$ **SU**(2) 가 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

그러면 $\mathbb{C}$ 위에 정의된 사상 φ_A 를 다음과 같이 정의할 수 있다:

$$w = \varphi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

이것을 1대1 대응관계로 볼 수 있는 이유는 $ad - bc = 1 \neq 0$ 이기 때문이다.

간단히 다음 사실을 확인할 수 있다.

문제 φ_A 는 $\mathbb{S}^2$ 에서 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 로 정의된 1대1 사상으로서 다음을 만족시킨다는 것을 보여라: $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B$.

이제 우리는

1. 이러한 φ_A 가 실제로 $\mathbb{S}^2$ 의 등거리 사상이 되는지?

2. 그리고 $A, B \in$ **SU**(2) 가 어떤 경우에 $\varphi_A = \varphi_B$ 가 되는지?

라는 질문에 대하여 답하여야 한다.

우선 (2)에 대하여 생각하여보자. 간단히 모든 z 에 대하여

$$\varphi_A(z) = \frac{az+b}{-\overline{b}z+\overline{a}} = \frac{cz+d}{-\overline{d}z+\overline{c}} = \varphi_B(z)$$

가 성립한다고 하자. $z = 0, 1, i$ 를 각각 넣으면 다음 세 식을 얻는다.

$$\frac{b}{\overline{a}} = \frac{d}{\overline{c}}, \quad \frac{a+b}{-\overline{b}+\overline{a}} = \frac{c+d}{-\overline{d}+\overline{c}}, \quad \frac{ai+b}{-\overline{b}i+\overline{a}} = \frac{ci+d}{-\overline{d}i+\overline{c}}. \tag{2.7}$$

그리고 a, b, c, d는 다음을 만족시킨다:

$$a\bar{a} = b\bar{b} = 1, \quad c\bar{c} = d\bar{d} = 1. \tag{2.8}$$

그러므로 우선 $\lambda = b/\bar{a} = d/\bar{c}$라 놓으면, $b = \lambda\bar{a}$, $d = \lambda\bar{c}$가 되고 조건 $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$로 부터

$$|a|^2\left(1 + |\lambda|^2\right) = 1, \quad |c|^2\left(1 + |\lambda|^2\right) = 1$$

가 된다 특히 $|a| = |c|$가 되어 적당한 ν ($|\nu| = 1$)이 존재하여 $c = \nu a$가 된다. 그러므로

$$A = \begin{pmatrix} a & \lambda\bar{a} \\ -\bar{\lambda}a & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \nu a & \lambda\overline{\nu a} \\ -\bar{\lambda}\nu a & \overline{\nu a} \end{pmatrix}.$$

가 된다. 이를 (2.7)의 세번째 식에 대입하여 정리하면 다음 조건을 얻는다:

$$0 = (\nu - \bar{\nu})|a|^2(1 + |\lambda|^2)$$

따라서 $\nu = \bar{\nu}$이고 ν는 실수이다. $|\nu| = 1$이므로 $\nu = \pm 1$이다.

이 계산 결과에 따라 다음 정리를 얻는다.

정리 2.6.1. $A, B \in \mathbf{SU}(2)$에 대하여 $\varphi_A = \varphi_B$이면 $A = \pm B$이다.

이제 질문은 $\mathbf{SU}(2)$의 원소 A가 있다고 할 때 평면 $\mathbb{C}$ 위에서 A가 주는 사상 φ_A을 $\mathbb{S}^2$ 위의 사상이라고 생각할 때 과연 이것은 어떤 사상이 되는가이다. 즉 입체사영을 $\Phi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$라고 하고 다음을 보자.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^2 \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\Phi"'] & \mathbb{S}^2 \arrow[d, "\Phi"] \\
\mathbb{C} \arrow[r, "\varphi_A"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

이 diagram에서 두 방향의 사상의 합성이 같도록 되는 η_A는 $\mathbb{C}$ 위의 사상 φ_A를 입체사영에 의해서 구면 위로 옮겨놓은 것에 불과하다. 즉 우리가 궁금하게 생각하는 것은 $A \in \mathbf{SU}(2)$에 대하여 $\mathbb{C}$ 위의 사상 φ_A를 생각하면 이에 대한 η_A가 과연 $\mathbb{S}^2$의 등거리 사상이 되는가 하는 것이다.

2.6.2 계산

이 절에서 우리는 위에서 제기한 문제, 즉

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbf{SU}(2)$$

에 대하여 $\eta_A \in \mathbf{SO}(3)$ 라는 사실을 확인할 것이고, 이로부터 η_A 는 $\mathbb{E}^3$ 의 등거리 사상임을 보인다. (따라서 $\mathbb{S}^2$ 의 등거리 사상이기도 하다.)

우선 역입체사영 Φ^{-1} 의 공식은 다음과 같다(2.5.2절 참조).

$$\Phi^{-1} : \alpha \mapsto \frac{(2\alpha, |\alpha|^2 - 1)}{|\alpha|^2 + 1} \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$$

문제 위 사실을 확인하여라.

이제 구면 위의 세 점이면서 정규직교 바탕벡터인 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$가 $\eta_A = \Phi^{-1} \circ \varphi_A \circ \Phi$에 의해 어느 점으로 대응되는가를 보자. 먼저 간단히 다음 사실을 확인할 수 있다.

$$\mathbf{i} \xrightarrow{\Phi} 1 \xrightarrow{\varphi_A} \frac{a+b}{\bar{a}-\bar{b}} \xrightarrow{\Phi^{-1}} \frac{\big(2(a+b)(a-b), |a+b|^2 - |a-b|^2\big)}{|a+b|^2 + |\bar{a}-\bar{b}|^2}$$

그런데 $|a+b|^2 + |\bar{a}-\bar{b}|^2 = 2(a\bar{a} + b\bar{b}) = 2$ 이므로 마지막 항은 $\left(a^2 - b^2, a\bar{b} + \bar{a}b\right)$ 와 같으며 따라서 다음이 성립한다.

$$\eta_A(\mathbf{i}) = \Phi^{-1} \circ \varphi_A \circ \Phi(\mathbf{i}) = \left(a^2 - b^2, a\bar{b} + \bar{a}b\right).$$

마찬가지 계산에 따르면 다음이 성립한다:

$$\eta_A(\mathbf{j}) = \Phi^{-1} \circ \varphi_A \circ \Phi(\mathbf{j}) = \left(i(a^2 + b^2), i(a\bar{b} - \bar{a}b)\right),$$
$$\eta_A(\mathbf{k}) = \Phi^{-1} \circ \varphi_A \circ \Phi(\mathbf{k}) = \left(-2ab, a\bar{a} - b\bar{b}\right).$$

따라서 만약 η_A 가 $\mathbb{E}^3$ 의 선형변환으로 확장될 수 있다면 해당하는 행렬은 다음 M_A 와 같을 것이다:

$$M_A := \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a^2 - b^2) & \mathrm{Re}(i(a^2 + b^2)) & \mathrm{Re}(-2ab) \\ \mathrm{Im}(a^2 - b^2) & \mathrm{Im}(i(a^2 + b^2)) & \mathrm{Im}(-2ab) \\ a\bar{b} + \bar{a}b & i(a\bar{b} - \bar{a}b) & a\bar{a} - b\bar{b} \end{pmatrix}$$

간단한 계산에 의하여 이 행렬이 $\mathbf{SO}(3)$의 원소임을 알 수 있다. 여기서 M_A의 세 열이 정규직교라는 걸 보일 때

$$(\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, c_1) \cdot (\operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_2, c_2) = \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + c_1c_2,$$

를 이용하면 계산이 편리할 수 있다.

문제 위의 모든 계산을 확인하여라. 특히 M_A의 행렬식이 1임을 어떻게 알 수 있는가?

η_A와 M_A의 정확한 관계를 알아내기 위하여 다음과 같이 진행한다. 임의의 $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} \in \mathbb{S}^2$에 대하여 $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} := M_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$라 할 때 다음 식

$$\Phi \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \varphi_A \circ \Phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

이 성립함을 보이면, 즉

$$\frac{X+iY}{1-Z} = \frac{a\frac{x+iy}{1-z}+b}{-\bar{b}\frac{x+iy}{1-z}+\bar{a}} = \frac{a(x+iy)+b(1-z)}{-\bar{b}(x+iy)+\bar{a}(1-z)}$$

임을 보이면 η_A를 적용하는 것은 M_A를 곱하는 것과 같음을 보인 셈이 된다. 간단한 계산에 의하여 다음을 얻는다:

$$\begin{aligned}
X+iY &= (a^2-b^2)x + i(a^2+b^2)y - 2abz \\
&= a^2(x+iy) - b^2(x-iy) - 2abz \\
&= a^2(x+iy) - b^2\frac{1-z^2}{x+iy} - 2abz \\
&= (a(x+iy)+b(1-z))(a(x+iy)-b(1+z))/(x+iy), \\
1-Z &= a\bar{a} + b\bar{b} - (a\bar{b}+\bar{a}b)x - i(a\bar{b}-\bar{a}b)y - (a\bar{a}-b\bar{a})z \\
&= -a\bar{b}(x+iy) - \bar{a}b(x-iy) + a\bar{a}(1-z) + b\bar{b}(1+z) \\
&= (-\bar{b}(x+iy)+\bar{a}(1-z))(a(x+iy)-b(1+z))/(x+iy).
\end{aligned}$$

여기서 $x^2+y^2 = 1-z^2, a\bar{a}+b\bar{b} = 1$을 이용하였다. 그러므로 $\mathbb{S}^2$의 원소에 η_A를 적용하는 것은 $M_A \in \mathbf{SO}(3)$를 곱하는 것과 같음을 알 수 있으며 이를 이용하여 η_A를 $\mathbb{E}^3$의 등거리 사상으로 볼 수 있다.

2.6.3 **SO**(3) 의 모습

SU(2) 의 정의를 보면 이의 원소는 두 복소수 a, b에 의해서 정하여지며 이것들은 $|a|^2 + |b|^2 = 1$을 만족시킨다. 즉 $a = x_1 + ix_2$, $b = x_3 + ix_4$라고 부르면 이 조건은

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

이 된다. 즉 **SU**(2) 는 4차원 유클리드 공간 $\mathbb{E}^4$ 의 구면 $\mathbb{S}^3$ 라고 볼 수 있다. 그리고 앞에서 보았듯이 **SO**(3) 는 이 **SU**(2) 의 두 원소 $\pm A$에 대하여 하나씩 대응된다. 그리고 이 $\pm A$는 당연히 구면 위의 두 점

$$\pm(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

에 해당되므로 결국 **SO**(3) 는 구면 $\mathbb{S}^3$ 에서 서로 마주보이는 두 점을 하나로 겹쳐서 붙여나가서 생기는 것이라고 할 수 있다. 이렇게 만들어진 공간을 3차원 사영공간이라 부르고 $\mathbb{RP}^3$ 로 나타낸다.

2.7 사원수와 $\mathbb{R}^3$ 에서의 회전변환

이 절의 목표

1. 사원수의 정의와 그 셈법을 알아본다.
2. 사원수의 곱셈이 벡터의 내적 및 외적과 갖는 관계를 알아본다.
3. 사원수의 곱셈이 삼차원 공간의 회전변환을 손쉽게 계산할 수 있게 도와준다는 사실을 알아본다.

들어가기

이곳의 내용은 김홍종 교수님의 원고 사원수—친구를 위하여를 다시 정리한 것으로서 사원수와 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$ 의 회전이동 사이의 관계를 알아본다. 평면 $\mathbb{R}^2$ 에서 원점을 중심으로 회전하는 회전변환을 복소수의 곱으로 나타낼 수 있음을 안다. 그렇다면 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$ 에서 (원점을 고정하는) 회전변환을 이와 비슷하게 나타내는 방법이 있을 수 있을까? 19세기 중반 W. R. Hamilton은 이 방법을 찾아내었는데 그것은 사원수라는 수의 체계를 만들어냄으로써 가능하였다.

2.7.1 사원수란 무엇인가?

사원수의 집합을 $\mathbb{H}$로 나타내겠다.

$\mathbb{H} = \mathbb{R} + \mathbb{R}^3$

사원수는 실수와 3차원 벡터의 합으로 이루어진 것이다:

$$q = t + \mathbf{v}, t \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$$

3차원 공간 $\mathbb{R}^3$ 의 표준기저 $\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)$ 에 대하여

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

와 같이 나타낼 수 있으므로 사원수 q는 $q = (t, x, y, z)$와 같이 나타낼 수도 있는데, 따라서 벡터공간으로서는 $\mathbb{H}$와 $\mathbb{R}^4$를 같은 것으로 볼 수 있다. 그러므로 사원수의 합과 차도 사원수이고, 사원수에 실수를 곱한 것도 사원수이다: 즉, $q_1 = t_1 + \mathbf{v}_1, q_2 = t_2 + \mathbf{v}_2$와 실수 r에 대하여

$$\begin{aligned} q_1 \pm q_2 &= (t_1 \pm t_2) + (\mathbf{v}_1 \pm \mathbf{v}_2) \\ rq_1 &= (rt_1) + (r\mathbf{v}_1) \end{aligned}$$

3차원 벡터 $\mathbf{v}$는 실수부가 없으므로 순허수라고 부르기도 한다.

주어진 사원수 $q = t + \mathbf{v}$에 대하여, 새로운 사원수

$$\bar{q} = t - \mathbf{v}$$

를 q의 켤레 사원수라고 부른다[8]. 어떤 사원수 q가 순허수일 필요충분조건은 $\bar{q} = -q$이고, 실수일 필요충분조건은 $\bar{q} = q$이다.

사원수의 곱셈

표준기저 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 사이의 곱을 다음과 같이 정의하고[9]

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$$

결합법칙을 이용하면 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 들 사이의 모든 곱이 계산된다: 예를 들어서 $-1 = \mathbf{ijk}$의 오른쪽에 $\mathbf{k}$를 곱하면

$$-\mathbf{k} = \mathbf{ijkk} = \mathbf{ij}(\mathbf{k}^2) = \mathbf{ij}(-1) \Rightarrow \mathbf{k} = \mathbf{ij}.$$

비슷한 방법을 사용하면, 다음을 얻을 수 있다:

$$\begin{aligned} \mathbf{ij} &= \mathbf{k}, & \mathbf{ji} &= -\mathbf{k}, \\ \mathbf{jk} &= \mathbf{i}, & \mathbf{kj} &= -\mathbf{i}, \\ \mathbf{ki} &= \mathbf{j}, & \mathbf{ik} &= -\mathbf{j} \end{aligned}$$

8) 복소수에 대해 그렇게 하듯이.
9) Hamilton 공식이라고 불리운다.

이제 분배법칙과 결합법칙이 성립함을 주장하면, 사원수의 곱이 정의된다: 두 사원수 $q_1 = t_1 + x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, q_2 = t_2 + x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$에 대하여

$$\begin{aligned} q_1q_2 = & \quad t_1t_2 - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2 \\ & + \quad (t_1x_2 + t_2x_1 + y_1z_2 - y_2z_1)\mathbf{i} \\ & + \quad (t_1y_2 - x_1z_2 + y_1t_2 + z_1x_2)\mathbf{j} \\ & + \quad (t_1z_2 + x_1y_2 - y_1x_2 + z_1t_2)\mathbf{k} \end{aligned}$$

앞의 계산들을 살펴보면, 다음을 알 수 있다.

먼저 사원수의 곱에서는 교환법칙이 성립되지 않으며, 또 $y_1 = z_1 = y_2 = z_2 = 0$인 경우에는, $q_1 = t_1 + x_1\mathbf{i}$와 $q_2 = t_2 + x_2\mathbf{i}$가 복소수라고 혼동하여 복소수의 곱을 계산한 것과 같다는 것이다. 그러므로 $\mathbf{j}, \mathbf{k}$의 계수가 모두 0인 수를 복소수라고 생각할 수 있다. 따라서 다음의 포함관계가 성립한다:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}.$$

사원수 $q = t + \mathbf{v}$의 크기, 즉 절대값 또는 norm은

$$|q| = \sqrt{t^2 + \|\mathbf{v}\|^2}$$

이다. 그러면 마치 복소수처럼

$$q\bar{q} = |q|^2 = \bar{q}q$$

가 성립하며, 만일 q가 0 이 아니면, 곱에 대한 역수 q^{-1}은

$$q^{-1} = \bar{q}/|q|^2$$

이다. 또한 다음 식도 성립한다:

$$\overline{q_1q_2} = \bar{q}_2\bar{q}_1, \quad |q_1q_2| = |q_1||q_2|.$$

처음 등식에서의 곱의 순서에 주의하여라.

순허수의 곱, 벡터의 내적, 외적

순허수 즉, $\mathbb{R}^3$의 벡터의 사원수곱과 내적, 외적 사이에는 다음과 같은 흥미로운 관계가 성립한다.

$$\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$$

만일 두 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$가 서로 수직이면, 사원수곱은 외적과 마찬가지임을 위의 식은 알려준다:

$$\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2 \Rightarrow \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1$$

마지막 등식은 외적의 성질이다. 또, 벡터 자신의 사원수곱은 벡터의 크기와 상관이 있음도 알려준다:

$$\mathbf{v}\mathbf{v} = -|\mathbf{v}|^2.$$

그러므로 $q_1 = r_1 + \mathbf{v}_1, q_2 = r_2 + \mathbf{v}_2$와 같이 사원수를

(실수) + (순허수)

꼴로 써서 곱을 계산하려 한다면

$$q_1q_2 = (r_1r_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) + (r_1\mathbf{v}_2 + r_2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$$

와 같이 된다.

2.7.2 사원수와 회전변환

사원수 $q = t + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$에 대하여 사상

$$M_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}, \quad M_q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}\bar{q}$$

를 생각해보자. 이 사상의 정의역은 $\mathbb{R}^3$ 즉, 순허수의 집합이다. 그런데

$$\overline{M_q(\mathbf{v})} = \overline{q\mathbf{v}\bar{q}} = \bar{\bar{q}}\bar{\mathbf{v}}\bar{q} = q(-\mathbf{v})\bar{q} = -q\mathbf{v}\bar{q} = -M_q(\mathbf{v})$$

이므로 $\overline{M_q(\mathbf{v})} = -M_q(\mathbf{v})$이다. 다시 말하면 이 사상의 치역도 $\mathbb{R}^3$ 즉, 순허수의 집합이다:

$$M_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

더욱이

$$M_q(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = M_q(\mathbf{v}_1) + M_q(\mathbf{v}_2), \quad M_q(r\mathbf{v}) = rM_q(\mathbf{v})$$

가 성립하므로 이 사상 M_q는 선형사상이다. 그러므로 행렬로 나타낼 수 있다. 표준기저 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$에 대해 행렬로 나타내면 다음과 같다:

$$M_q = \begin{bmatrix} t^2 + x^2 - (y^2 + z^2) & 2(xy - tz) & 2(ty + xz) \\ 2(xy + tz) & t^2 - x^2 + y^2 - z^2 & -2(tx - yz) \\ -2(ty - xz) & 2(tx + yz) & t^2 - x^2 - (y^2 - z^2) \end{bmatrix}$$

더욱이, $|M_q(\mathbf{v})| = |q|^2|\mathbf{v}|$ 이므로 M_q 는 닮음비가 $|q|^2$ 인 닮음변환이다. 특히 $|q| = 1$ 이면, M_q 는 길이를 보존하는 (또는 거리를 보존하는) 사상, 즉 합동변환이다[10).]

보기를 살펴보면,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이므로 항등변환이고

$$M_{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

이므로 x-축을 중심으로 $180°$ 회전시키는 사상이고

$$M_{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

이므로 y-축을 중심으로 $180°$ 회전시키는 사상이고

$$M_{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이므로 z-축을 중심으로 $180°$ 회전시키는 사상이다.

앞으로 크기가 1인 사원수를 단위 사원수라고 부르자. 이제 q가 단위사원수면 사상 M_q는 모두 회전변환임을 보이겠다[11)].

10) 실제로 벡터공간 V 사이에 정의된 사상 $S : V \to V$ 가 벡터의 크기를 보존하면, 즉 임의의 $\mathbf{v} \in V$ 에 대하여 $\|S(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$ 이면 이 사상은 선형사상이다. 이 사실을 증명하여 보아라.

11) 사실 3차원 공간의 합동변환은 4개 이하의 평면에 대한 대칭이동의 합성으로 표현된다. 그러므로 합동변환이 방향을 보존한다면 그것은 회전변환이어야 한다. 그러므호 회전변환인지 아닌지를 알아내기 위해서는 주어진 행렬표현의 행렬식 값의 부호만을 알아 보아도 충분하다. 그런데 여기에서 관심을 갖고 있는 것은 주어진 단위 사원수는 어떤 축을 중심으로 몇 도만큼 회전하는 회전변환을 나타내는가를 알아내는 것이다.

이제 $q = t + \mathbf{v}$가 단위 사원수라고 하자. 그러면 $1 = |q|^2 = t^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ 이므로, 적당한 $\theta \in (0, \pi)$ 에 대하여

$$t = \cos\theta, \quad \|\mathbf{v}\| = \sin\theta$$

로 놓을 수 있다[12]. 그러면 $\mathbf{v}$ 방향의 단위벡터 $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ 에 대하여

$$q = \cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta$$

로 쓸 수 있다.

정리 2.7.1. 단위 사원수 $q = \cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta$에 대하여, 사상 M_q는 $\mathbf{u}$-축을 중심으로 2θ만큼 회전시키는 회전변환이다.

먼저 $\mathbf{uu} = -1$ 이므로

$$\begin{aligned} M_q(\mathbf{u}) &= (\cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta)\mathbf{u}(\cos\theta - \mathbf{u}\sin\theta) \\ &= (\mathbf{u}\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta - \mathbf{u}\sin\theta) = \mathbf{u} \end{aligned}$$

이므로 사상 M_q는 $\mathbf{u}$-축을 중심으로 하는 회전이동임을 알 수 있다. 이제 회전각의 크기를 알기 위하여, $\mathbf{u}$를 포함하는 정규직교기저를 만들겠다. 이를 위하여 $\mathbf{w}$를 $\mathbf{u}$와 수직인 단위벡터라고 하면

$$\mathbf{u}, \ \mathbf{w}, \ \mathbf{uw} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$$

는 오른손 정규직교기저가 된다. 이제 $\mathbf{uw} = -\mathbf{wu}$ 이므로 다음의 두 계산

$$\begin{aligned} M_q(\mathbf{w}) &= (\cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta)\mathbf{w}(\cos\theta - \mathbf{u}\sin\theta) \\ &= (\mathbf{w}\cos\theta + \mathbf{uw}\sin\theta)(\cos\theta - \mathbf{u}\sin\theta) \\ &= \mathbf{w}\cos^2\theta - \mathbf{uwu}\sin^2\theta + \mathbf{uw}\sin\theta\cos\theta - \mathbf{wu}\cos\theta\sin\theta \\ &= \mathbf{w}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \mathbf{uw}(2\sin\theta\cos\theta) \\ &= \mathbf{w}\cos 2\theta + \mathbf{uw}\sin 2\theta, \\ M_q(\mathbf{uw}) &= -\mathbf{w}\sin 2\theta + \mathbf{uw}\cos 2\theta \end{aligned}$$

12) 만일 $\theta = 0, \pi$ 이면 앞의 표현에서 $t = \pm 1$ 이 되고 이때 사상 $M_{\pm 1}$ 은 항등행렬이 되어 버린다.

으로부터 실제로 회전각이 2θ 임을 알 수 있다.[13)]

역으로 이 정리는 축 $\mathbf{u}$를 중심으로 2θ만큼 회전시키는 회전변환을 나타내는 행렬은

$$M_{\cos\theta+\mathbf{u}\sin\theta}$$

임도 알려준다[14)]. 다시 말하면, 단위사원수 $a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}$가 정의하는 회전변환

$$M_{a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}}$$

의 회전각은 $2\cos^{-1}a$ 이고 회전축은 $b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}$의 방향이라는 것이다.

문제 직선 $x = t, y = -t, z = t$를 중심으로 $30°$ 회전시키는 회전이동에 의한 점 $(1, 2, 3)$의 상의 좌표를 모두 구하여라.

회전변환의 합성

단위사원수들의 집합은 3차원 공 $\mathbb{S}^3$ 와 같다. 이제 원점을 고정하는 3차원 회전이동의 집합은 사상의 합성 (또는 행렬의 곱)에 대해 군을 이루는데, 이 군을 $SO(3)$로 나타내자. 그러면 앞에서 단위복소수 q를 이용하여 회전변환 M_q를 정의하는

13) 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$ 에서의 회전변환을 정의하려면, 대충 생각해보건데 이 회전변환의 축을 나타내는 3차원 벡터 $\mathbf{v} = (a, b, c)$가 필요하고 또 회전각의 크기 θ가 필요하다. 즉, a, b, c, θ 이렇게 4개의 정보가 필요한 것으로 보인다. 그런데 다시 잘 생각해보면, 벡터 $\mathbf{v}$가 아니라 벡터의 방향만으로도 충분하다. 다시 말하면, a, b, c 이렇게 3개의 정보 대신에 적당한 2개의 정보 만으로도 충분하다는 것이다. 그러므로 회전변환을 정의하기 위하여 먼저 회전각의 크기 2θ를 먼저 지정하고 그 다음으로는 3차원 단위벡터 (또는 단위순허수) $\mathbf{u}$를 택하되, 두 개의 벡터 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$는 방향이 같도록 단위사원수 $\cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta$를 택하면 되겠다.

14) 사실은 단위사원수가 아니어도 회전변환을 정의할 수 있다: 0 이 아닌 사원수 p에 대하여

$$M_p(\mathbf{u}) := p\mathbf{u}p^{-1}$$

와 같이 사상 M_p를 정의하면 0이 아닌 임의의 실수 r에 대하여 $M_{rp}(\mathbf{u}) = M_p(\mathbf{u})$, 즉, $M_{rp} = M_p$ 임을 확인할 수 있다. 그러니까 단위사원수에 대해서만 이 사상을 정의해도 충분하다. 그런데 q가 단위사원수이면 $p^{-1} = \bar{q}$이므로

$$M_q(\mathbf{u}) = q\mathbf{u}q^{-1} = q\mathbf{u}\bar{q}$$

로서 본문에서 정의한 사상과 같아진다.

과정은 다음과 같은 사상을 정의한다:

$$M : \mathbb{S}^3 \to SO(3), \quad M(q) = M_q. \tag{2.9}$$

그런데 $M_{-q} = M_q$ 이므로 이 대응은 (일대일 대응이 아니고) 2:1 대응이다[15). 한편, 단위사원수 두개를 곱한 결과는 다시 단위사원수가 되므로 3차원 공 $\mathbb{S}^3$ 은 사원수의 곱에 대해 군을 이룬다. 이제 단위사원수 q_1, q_2 에 대해 회전사상의 합성 $M_{q_1}M_{q_2}$ 은 어떠한 사상인지 알아보자:

$$\begin{aligned}(M_{q_1}M_{q_2})(\mathbf{v}) &= M_{q_1}(M_{q_2}(\mathbf{v})) = M_{q_1}(q_2\mathbf{v}\bar{q}_2)\\ &= q_1q_2\mathbf{v}\overline{q_2q_1}\\ &= (q_1q_2)\mathbf{v}(\bar{q}_1\bar{q}_2) = M_{q_1q_2}(\mathbf{v})\end{aligned}$$

이므로

$$M_{q_1}M_{q_2} = M_{q_1q_2}$$

임을 알 수 있다. 이 식은 앞의 대응 (2.9)이 군에서 군으로 가는 준동형사상(homomorphism)임을 알려줄 뿐만 아니라, $\mathbf{u}_2$ 축을 중심으로 $2\theta_2$ 만큼 회전시킨 다음에 다시 $\mathbf{u}_1$ 축을 중심으로 $2\theta_1$ 만큼 회전시키면 어떤 축을 중심으로 얼마만큼 회전시키는 회전사상이 되는지도 알려준다: 즉, 다음 식을 이용하면 그 축과 그 회전각의 크기를 계산할 수 있다:

$$\begin{aligned}&(\cos\theta_1 + \mathbf{u}_1\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \mathbf{u}_2\sin\theta_2)\\ &\qquad = (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2\sin\theta_1\sin\theta_2)\\ &\qquad\quad + (\mathbf{u}_1\sin\theta_1\cos\theta_2 + \mathbf{u}_2\cos\theta_1\sin\theta_2 + \mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2\sin\theta_1\sin\theta_2)\\ &\qquad =: \cos\alpha + \mathbf{u}\sin\alpha\end{aligned}$$

문제

1. x 축을 중심으로 $90°$ 회전한 다음 y 축을 중심으로 $90°$ 회전하는 것은 어떤 축을 중심으로 얼마만큼 회전시키는 회전사상이 되는가?
2. 회전변환 M_q 의 역변환은 $M_{\bar{q}}$ 임을, 즉 $M_q^{-1} = M_{\bar{q}}$ 임을 보여라.

15) 그러므로 $\mathbb{S}^3/\{\pm 1\} \approx SO(3)$ 이다.

2.8 $\mathbb{S}^3$ 는 대략 어떻게 생겼나?

이 절의 목표

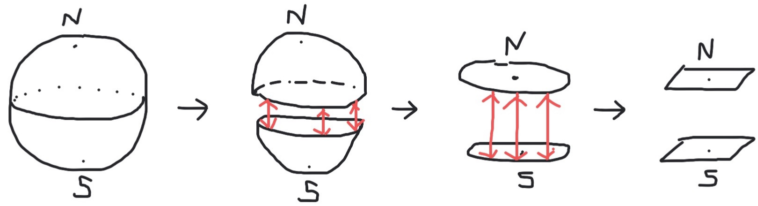
1. $\mathbb{S}^3$ 의 위상적 모습을 알아보는 방법을 통해서 위상기하학의 사용법을 알아 본다.
2. 자르고 변형하고 붙이는 것을 통해서 주어진 기하학적 대상을 알아보기 좋은 형태로 바꾸어 위상적 모습을 파악한다.
3. $\mathbb{S}^3$ 를 torus로 분해해 본다.
4. 연구하는 대상 공간 안의 벡터장(부는 바람)을 연구해서 전체 모습과의 관계를 파악한다.

들어가기

여기에서는 3차원 공이 "대략" 어떻게 생겼는가를 알아본다. "대략"이라는 뜻은 "위상적인" 모양을 알아보겠다는 뜻이다. Kenji Ueno, Koji Shiga, Shigeyuki Morita, "A Mathematical Gift", I, *Mathematical World* Vol.19, 2003, American Mathematical Society의 내용을 정리하였다.

2.8.1 $\mathbb{S}^2$ 의 대략적인 모습

다음 그림과 같이, 두 개의 사각형의 경계들을 붙이면, $\mathbb{S}^2$ 의 대략적인 모습을 얻을 수 있다. 여기에서 사각형의 경계들은 $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ 의 적도 $\{(x,y,0) : x^2+y^2 = 1\}$ 를 나타낸다고 생각한다. 사각형들은 원판과 위상동형이다.



2.8.2 $\mathbb{S}^3$ 의 적도

$\mathbb{S}^3$ 이 어떻게 생겼는가를 알아보기 위해서, $\mathbb{S}^3$ 를 우리가 잘 알고 있는 것들로 분해해서 다시 붙이는 작업을 해 보고자 한다. 이때의 안내원이 $\mathbb{S}^2$ 에 대한 앞에서의 과정으로서, $\mathbb{S}^2$ 의 적도를 자르면, 원판 두개를 얻고, 원판과 위상동형인 사각형의 경계들을 다시 붙이면 $\mathbb{S}^2$ 를 복구하였었다.

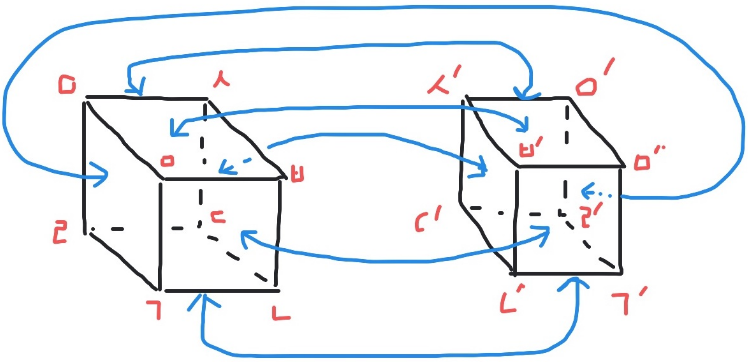
이제 우리는 $\mathbb{S}^3$ 도 적도를 따라서 자른 다음에 다시 붙이려고 한다. $\mathbb{S}^3$ 의 적도란 $\mathbb{S}^3$ 의 점으로서 마지막 좌표가 0인 점들을 말하는데

$$\{(x, y, z, t) : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1, t = 0\} = \{(x, y, z, 0) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

이므로 이들은 3차원 공간에 들어있는, 반지름이 1인 공으로 생각할 수 있고, 이 공은 3차원 공간의 정육면체의 표면과 위상동형이다. 이에 더불어서, 적도를 따라서 잘랐을 때 생기는 $\mathbb{S}^3$ 의 두 부분은 이 정육면체의 내부와 위상동형이다. 그러므로 $\mathbb{S}^3$ 는 대략 다음과 같이 만들어짐을 알 수 있다.

> 속이 찬 두개의 정육면체를 두 정육면체의 표면끼리 붙이면 $\mathbb{S}^3$ 를 얻는다.

그러면 이제 문제는 두 정육면체의 표면끼리 붙이되 "어떻게" 붙이는가일 것인데, 그 방법을 다음 그림이 알려준다:



2.8.3 Doughnut

앞에서의 붙임의 방법을 보다 구체적으로 이해하기 위해서, 먼저 각각의 정육면체에서 속이 찬 원기둥을 빼내겠다. 그런데, $\mathbb{S}^3$ 에서 보면, 두개의 정육면체의 면들은 서로 붙어있으므로, 빼어 낸 두개의 원기둥은 $\mathbb{S}^3$ 에서의 doughnut과 같다.

2.8.4 $\mathbb{S}^3 -$ doughnut = doughnut

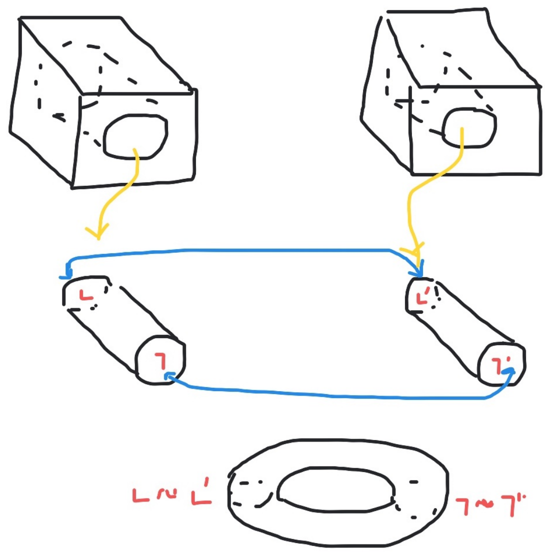
그러면 $\mathbb{S}^3$ 에서 doughnut을 빼어냈을 때, 남은 부분은 어떻게 생겼을까? 이를 알아보기 위해서 X 는 정육면체 D 에서 원기둥을 빼고 남은 부분, Y 는 정육면체 E 에서 원기둥을 빼고 남은 부분이라고 하자. 다음 그림에서

(I) 은 정육면체에서 원기둥을 빼고 남은 부분인 X 와 Y 를 나타낸다.

(II) 는 남은 부분을 갈라서 가른 부분을 펼치는 과정이고

(III) (II)의 과정에 이어서 계속 펼치되

(IV) 와 같은 널판지 모양을 만든다.



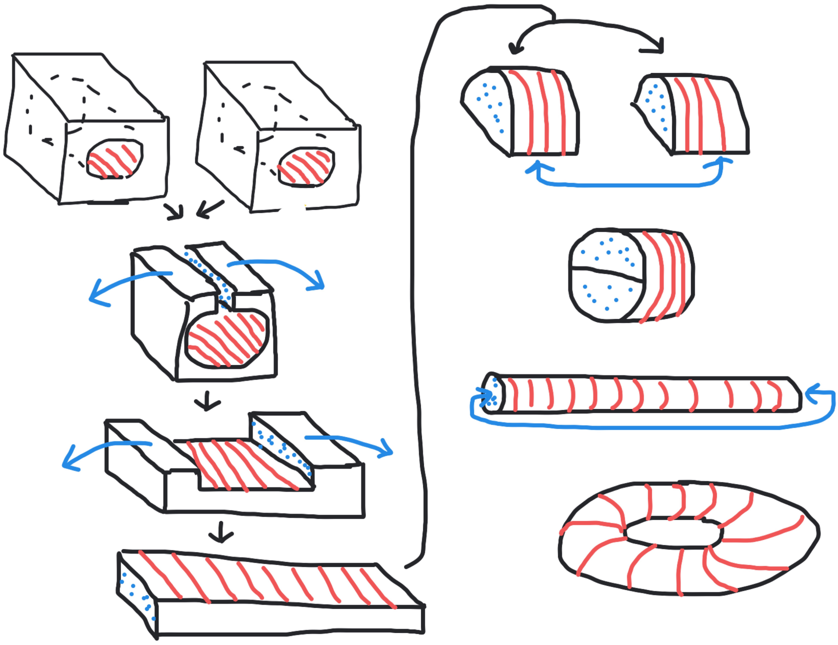
(V) 결국, 이러한 과정을 통하여, X 와 Y 를 이와 같은 모양으로 만들 수 있다. 여기에서 실선들로 표시된 부분은 빼어낸 원기둥의 옆면들이고, 점들이 찍혀 있는 부분은 (II) 에서 갈라낸 부분이며, 보이지 않는 밑면은 정육면체의 표면을 나타낸다.

(VI) 정육면체의 표면(그림 (V) 에서 보이지 않는 부분)을 따라서 X 와 Y 를 붙인다.

(VII) (II) 에서 갈라낸 부분(점들이 찍혀 있는 부분)끼리 붙인다.

(VIII) 결과적으로 만들어진 것은 doughnut이다.

그래서 결국 $\mathbb{S}^3$ 에서 doughnut을 빼어냈을 때, 남은 부분은 doughnut 이다. 이 과정을 거꾸로 말한다면,



두개의 doughnut의 표면을 따라서 붙이면 $\mathbb{S}^3$ 를 얻는다.

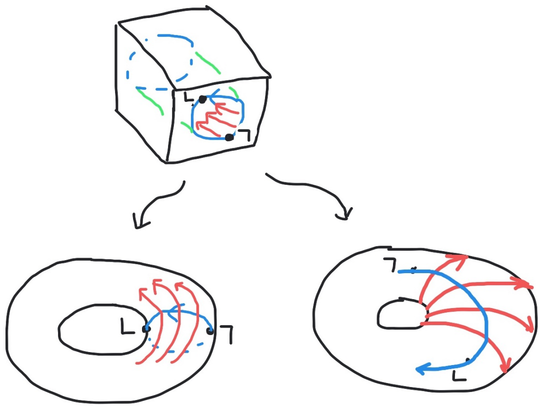
$$\text{doughnut} \cup \text{doughnut} = \mathbb{S}^3$$

고 말할 수 있다. 그러면 이제 남은 문제는 두개의 doughnut 의 표면을 "어떻게" 붙이는가일 것이다.

2.8.5 Doughnut 붙이기

두개의 doughnut 의 표면을 붙이는 과정을 잘 살펴보면, 그들이 묘하게 붙음을 알 수 있다. 먼저, 앞의 그림 (I) 의 실선들은 빼어낸 원기둥을 붙이는 과정에서 원을 이루고, 남은 부분을 붙이는 과정에서도 원을 이루게 될 터인데 이 두개의 원을

양쪽의 doughnut에서 보면 "다른" 원임을 알 수 있다. 아래의 그림에서 왼쪽은 원기둥을 붙이는 과정에서 만들어지는 원을 보여주고 있고, 오른쪽은 남은 부분을 붙이는 과정에서 얻게 되는 원을 보여주고 있다.

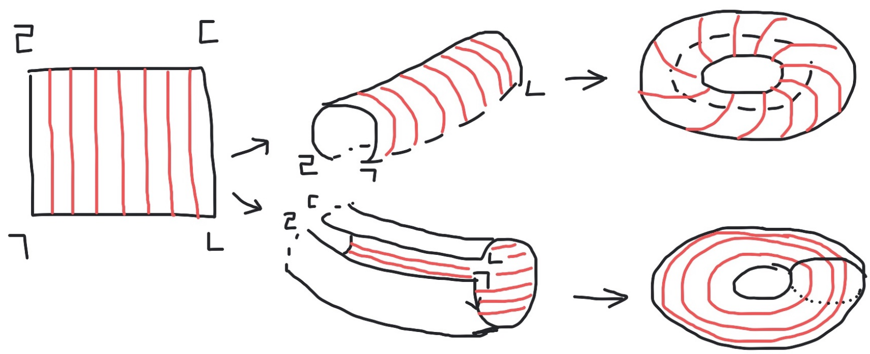


2.8.6 원환면, Torus

앞의 과정에서 살펴보면, 그림 (I) 의 실선은 원기둥의 "안쪽" 면에 그려져 있으므로 doughnut의 안쪽 면에 있는 원을 만들 것이고, 원기둥을 뺀 쪽에서 보면 그 부분의 "바깥쪽" 면에 그려져 있으므로 나머지 doughnut의 바깥쪽 면에 있는 원을 만들 것이다.

Doughnut의 표면은 원환면이라고 불리우는 곡면인데, 원환면은 사각형 $ABCD$의 마주보는 변끼리 붙임으로써 얻을 수 있다. 사각형 $ABCD$에 그려져 있는 실선이 바깥쪽 면에 그려지도록 원환면을 만든다면 그림의 위쪽과 같이 될 것이고, 안쪽에 그려지도록 원환면을 만든다면 그림의 아래쪽과 같이 될 것이다.

위의 원환면이나 아래의 원환면이나는 같은 원환면인데, 이 원환면을 $\mathbb{S}^3$ 를 만드는 방식으로 붙이는 것이 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$ 에서는 불가능한 것으로 보이겠지만, 우리의 공이 위치해 있는 4차원 공간 $\mathbb{R}^4$ 에서는 아마도 자연스러운 일인가보다.



Summary

위의 과정을 다음과 같이 정리할 수 있겠다.

먼저 $\mathbb{S}^3$를 4차원 cube I^4의 경계로 생각하고,

$$\mathbb{S}^3 = \partial I^4,$$

또 4차원 cube I^4를 2차원 cube I^2의 곱으로 생각한다.

$$I^4 = I^2 \times J^2.$$

그러면

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^3 = \partial I^4 &= \partial(I^2 \times I^2) \\ &= (\partial I^2) \times I^2 \cup_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1} I^2 \times \partial I^2 \\ &= \mathbb{S}^1 \times I^2 \cup_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1} I^2 \times \mathbb{S}^1 \end{aligned}$$

인데, $\mathbb{S}^1 \times I^2 = \mathbb{S}^1 \times D$이므로 doughnut이고 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$은 torus 이므로 $\mathbb{S}^3$은 doughnut을 그 경계인 torux를 따라서 붙인 것과 같다. 더욱이 붙이는 2개의 doughnut이 하나는 $\mathbb{S}^1 \times D$이고 다른 하나는 $D \times \mathbb{S}^1$이므로 torus를 따라서 붙이는 방식이 앞에서 설명한 것과 같다.

2.8.7 $\mathbb{S}^2$ 에 부는 바람과 $\mathbb{S}^3$ 에 부는 바람

$\mathbb{S}^2$ 에 부는 바람

$\mathbb{S}^2$ 의 전체에서 정의된 접벡터장은 반드시 그 값이 0이 되는 점이 존재한다. 이 사실은 짝수 차원 공에 대해서는 항상 성립한다. 복잡한 위상기하적 도구를 사용하지 않은 해석적 증명으로는

> John Milnor, Analytic proof of the “Hairy Ball Theorem” and the Brouwer Fixed Point Theorem, American Mathematical Monthly, 85 (1978) 521-524

를 추천한다.

$\mathbb{S}^3$ 에 부는 바람

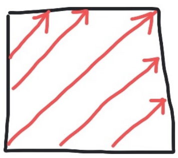
$\mathbb{S}^3$ 의 어느 점에서도 0 값을 갖지 않는 접벡터장을 만들기 위해, 앞의 두 개의 사각형 $ABCD$ 에서 45° 로 흐르는 물을 생각하자. 그리고 앞에서의 방식으로 두 개의 사각형 $ABCD$ 를 붙였다고 하자. 그러면 이 물의 흐름을 나타내는 화살표들끼리 붙게 된다. 이 물의 흐름은 doughnot의 표면에서의 흐름인데, 이 표면에서의 흐름을 doughnut 의 내부까지 확장하면 결국 $\mathbb{S}^3$ 에서 정지하지 않고 흐르는 물의 흐름, 즉 0값을 갖지 않는 접벡터장을 얻게 된다[16].

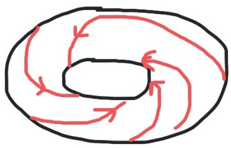
앞에서의 이상한 붙임을 이용한 것인데, 이를 이용하지 않고 보다 간단하게 다음과 같이 그러한 접벡터장의 존재를 보일 수도 있다.

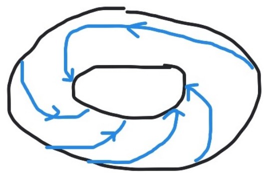
$\mathbb{R}^4$ 의 벡터장 $\mathbf{v}(x, y, z, t) = (-y, x, -t, z)$ 의 정의역을 $\mathbb{S}^3$ 로 제한하면 이는 $\mathbb{S}^3$ 의 접벡터장인데, $\mathbb{S}^3$ 의 어느 점에서도 0 이 아니다.

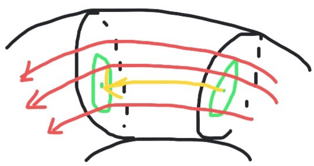
문제 이 주장을 확인하여라.

16) 이 접벡터장은 이 물의 흐름의 integral vector field이다.









2.9 Hopf 사상 들여다 보기

이 절의 목표

1. Hopf 사상의 정의를 알아본다.
2. Hopf 사상에 의해서 같은 점으로 대응되는 점들이 이루는 부분집합의 기하학적 모양을 알아본다.

들어가기

이곳의 내용은 D. W. Lyons, "An Elementary Introduction to Hopf Fibration," Mathematics Magazine, 76 (2003) 87–98 을 정리한 것이다.

2.9.1 Hopf 사상

Hopf 사상 $H : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ 은 다음과 같이 정의되는 사상이다:

$$H(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 - z^2 - t^2, 2(xt + yz), 2(yt - xz)), \tag{2.10}$$

$$H(z_1, z_2) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1\overline{z}_2) \tag{2.11}$$

첫번째 식에서는

$$\mathbb{S}^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\},$$
$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

로 생각한 것이고 두번째 식에서는

$$\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\},$$
$$\mathbb{S}^2 = \{(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} : t^2 + |z|^2 = 1\}$$

로 생각한 것이다[17].

17) $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \leftrightarrow (x + iy, z + ti) \in \mathbb{C}^2$.

이번에는 $\mathbb{S}^3$ 를 단위사원수의 집합, $\mathbb{S}^2$ 를 단위순허수의 집합, 즉

$$\mathbb{S}^3 = \{q = x + y\mathbf{i} + z\mathbf{i} + k\mathbf{k} \in \mathbb{H} : \|q\| = 1\},$$
$$\mathbb{S}^2 = \{p = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \in \mathbb{H} : \|p\| = 1\}$$

으로 생각한다면 앞의 Hopf 사상을 다음과 같이 사원수를 이용하여 쓸 수 있다:

$$H(q) = M_q(\mathbf{i}) = q\,\mathbf{i}\,\overline{q}. \tag{2.12}$$

앞에서 단위사원수 q는 $\mathbb{R}^3$의 회전변환 M_q을 정의함을 살펴보았는데, 그 회전변환에 대한 점 $(1,0,0) \in \mathbb{R}^3$ (또는 사원수 **i**)의 상(image)으로 $H(q)$를 정의하겠다는 것이다.

문제 이 사상이 실제로 Hopf 사상임을 확인하여라.

2.9.2 Hopf 사상의 역상

다음 집합 $H^{-1}(\mathbf{i}) = \{q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{S}^3 : H(q) = \mathbf{i}\}$을 계산하기 위하여 등식 $q\mathbf{i}\overline{q} = \mathbf{i}$의 오른쪽의 양변에 q를 곱하면 $a\mathbf{i} - b - c\mathbf{k} + d\mathbf{j} = a\mathbf{i} - b + c\mathbf{k} - d\mathbf{j}$, 그런데 q는 단위벡터이므로

$$H^{-1}(\mathbf{i}) = \{(\cos\theta, \sin\theta, 0, 0)\} = \{\cos\theta + \sin\theta\mathbf{i}\}$$

이다. 이 집합은 $\mathbb{S}^3$에 들어있는 원이다.

문제 다음을 확인하여라.

$$H^{-1}(-\mathbf{i}) = \{(0, 0, \cos\theta, \sin\theta)\} = \{\cos\theta\mathbf{j} + \sin\theta\mathbf{k}\}$$

점 $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$에 대하여 집합 $H^{-1}(\mathbf{v})$를 점 $\mathbf{v}$에서의 Hopf 사상의 *fiber*라하고 간단히 *Hopf fiber* 부른다. 지금까지의 과정을 잘 돌이켜본다면, $\mathbf{v}$에서의 Hopf 사상의 fiber란 무엇이가 하면,

> 기준점 $\mathbf{i} \in \mathbb{S}^2$를 점 $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$로 옮기는 회전변환을 나타내는 단위사원수 전체의 집합

라는 것을 알 수 있다. 이제 Hopf 사상의 fiber가 어떻게 생겼는가를 알아보자.

2차원 공 $\mathbb{S}^2$의 두 점 $\mathbf{i}, \mathbf{v} \neq -\mathbf{i}$에 대하여 두 점을 연결하는 $\mathbb{S}^2$의 대원을 생각하자. $\mathbf{v} \neq -\mathbf{i}$이므로 이 대원은 유일하다. 이 대원의 점으로서 $\mathbf{i}, \mathbf{v}$까지의 거리가 같은 점이 있는데 (사실은 2개) 그 점을 지나며 처음의 대원과 수직한 대원을 생각하자. 그러면 $\mathbf{i}$를 $\mathbf{v}$로 옮기는 회전사상의 축은 나중의 대원을 지나야 하며, 이 경우 축이 결정되면 그 회전변환의 회전각도 자동으로 정해진다.[18] 그러므로 주어진 두 점 $\mathbf{i}, \mathbf{v} \neq -\mathbf{i}$에 대하여 $\mathbf{i}$를 $\mathbf{v}$로 옮기는 회전변환의 집합은 나중의 대원의 점의 집합과 일대일 대응이 된다. 만일 $\mathbf{v} = -\mathbf{i}$이면 이 두점을 있는 대원은 무수히 많이 있겠지만 $\mathbf{i}, \mathbf{v}$까지의 거리가 같은 점을 지나며 이 무수히 많은 대원과 수직한 대원은 여전히 유일하다(만일 $\mathbf{i}, \mathbf{v}$가 각각 북극점, 남극점이면 구하려하는 나중의 대원은 적도이다). 그러므로 이 경우에도 $\mathbf{i}$를 $\mathbf{v}$로 옮기는 회전변환의 집합은 나중의 대원의 점의 집합과 일대일 대응이 된다. 따라서

Hopf 사상의 fiber는 원 $\mathbb{S}^1$

이라고 말할 수 있겠다.[19]

그러므로 또 다음과 같이 말할 수 있다.

- 2차원 공 $\mathbb{S}^2$의 각 점에 원 $\mathbb{S}^1$을 잘 붙임으로써 3차원 공 $\mathbb{S}^3$를 만들 수 있다.
- Hopf 사상 $H : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$는 $\mathbb{S}^2$의 각 점에 붙어있는 원 $\mathbb{S}^1$을 $\mathbb{S}^2$의 그 점으로 보내는 사상이다.

18) $\cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta$를 찾고자 하는데, $\mathbf{u}$는 나중의 대원에 있어야 하고, $\mathbf{u}$가 정해지면 θ는 자동으로 정해진다는 것이다.

19) 그런데 이러한 기하학적 관찰을 이용하여서 fiber를 계산하려하면 그 계산이 매우 복잡해진다. 그래서 경우에 따라서는 두번째 정의식을 이용하는 것이 보다 나을 수 있다. 예를 들어서, $H(z, w) = \mathbf{v}$라 하고 H^{-1}를 계산해 보겠다. 만일 $H(z_1, w_1) = \mathbf{v}$라면 주어진 $(z, w) \in \mathbb{C}^2$에 대하여 $(z_1, w_1) \in \mathbb{C}^2$ 다음 방정식을 만족시킨다:

$$\begin{aligned} |z|^2 - |w|^2 &= |z_1|^2 - |w_1|^2, \\ 2z\overline{w} &= 2z_1\overline{w}_1, \\ |z|^2 + |w|^2 = 1 &= |z_1|^2 + |w_1|^2 \end{aligned}$$

이 방정식을 풀면 $(z_1, w_1) = e^{i\theta}(z, w)$를 얻는다.

2.9.3 Fiber들의 관계

입체사영

Hopf fiber들이 서로 어떻게 얽혀 있는가를 알아보기 위해 입체사영 $\sigma : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\sigma(x, y, z, t) = \left(\frac{y}{1-x}, \frac{z}{1-x}, \frac{t}{1-x} \right)$$

를 생각한다.[20] 이 사상의 역사상은

$$\sigma^{-1}(\vec{v}) = \frac{1}{1+\|\vec{v}\|^2}(2\vec{v}, -1+\|\vec{v}\|^2)$$

이다. 그런데 $\mathbb{S}^3$의 원은 항상 $\mathbb{S}^3$와 2차원 평면

$$\Sigma = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{S}^3 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t = e_1,\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t = e_2\}$$

과의 공통부분이므로 $\vec{w}_i = (a_i, b_i, c_i)$ $(i = 1, 2)$라고 하면

$$\begin{aligned}
\vec{v} \in \sigma(\Sigma) \quad &\Leftrightarrow \quad \sigma^{-1}(\vec{v}) \in \Sigma \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+\|\vec{v}\|^2}(2\vec{v}, -1+\|\vec{v}\|^2) \in \Sigma \\
&\Leftrightarrow \quad 2\vec{v} \cdot \vec{w}_i + d_i(-1+\|\vec{v}\|^2) = e_i(1+\|\vec{v}\|^2) \quad (i = 1, 2)
\end{aligned}$$

이다. 이 계산이 알려 주듯이 이 입체사영 σ는 $\mathbb{S}^3$의 원을 $\mathbb{R}^3$의 원 또는 직선으로 보내고 역으로 $\mathbb{R}^3$의 원 또는 직선을 $\mathbb{S}^3$의 원으로 보낸다. 특히,

$$\sigma(\cos\theta, \sin\theta, 0, 0) = \left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}, 0, 0 \right)$$

이므로 $\sigma(H^{-1}(\mathbf{i}))$는 x-축이며, 또

$$\sigma(0, 0, \cos\theta, \sin\theta) = (0, \cos\theta, \sin\theta)$$

이므로 $\sigma(H^{-1}(-\mathbf{i}))$는 yz-평면에 있는, 중심이 원점인 단위원이다.

문제 $\mathbf{v} \neq -\mathbf{i}$일 때 $H^{-1}(\mathbf{v}) = (e^{i\theta}z, e^{i\theta}w)$라고 하면 $z, w \neq 0$이다. 원 $\sigma(H^{-1}(\mathbf{v}))$가 yz-평면과 만나는 점을 P_1, P_2라고 하면

$$\|P_1\|, \|P_2\| = \frac{|w|}{1-|z|}, \frac{|w|}{1+|z|}$$

임을 보여라.[21]

---

20) 북극점으로 보통의 점 $(0, 0, 0, 1)$을 택하지 않고 점 $(1, 0, 0, 0)$을 택하여서 입체사영을 정의하였음에 주의하여라.

21) 이 사실은 두 개의 원 $\sigma(H^{-1}(-\mathbf{i}))$와 $\sigma(H^{-1}(\mathbf{v}))$가 걸쳐있음을 알려준다.

Hopf 걸침

이제 서로 다른 Hopf fiber 들은 서로 걸쳐있음(linked)을 보이겠다.

점 $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$에 대해 위상동형사상 $\psi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$

$$\psi(q) = -\mathbf{i}\mathbf{v}^{-1}q, q \in \mathbb{H}$$

를 생각하자[22). 이 사상은 $\psi(\mathbf{v}) = -\mathbf{i}$이므로 $\mathbf{v}$을 $-\mathbf{i}$로 보낸다. 그러므로 서로 다른 두 점 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{S}^2$에 대하여 fiber $H^{-1}(\mathbf{v})$는 fiber $H^{-1}(-\mathbf{i})$로 보내고, fiber $H^{-1}(\mathbf{w})$는 적당한 다른 fiber C로 보낸다. 이제 두개의 fiber $H^{-1}(\mathbf{v}), H^{-1}(\mathbf{w})$가 걸쳐있음을 보이기 위하여 fiber $H^{-1}(-\mathbf{i})$와 fiber C가 걸쳐있음을 보이면 충분한데, 이를 위하여 fiber $H^{-1}(-\mathbf{i})$와 fiber C의 입체사영에 의한 상들이 겹쳐있음을 보이면 충분하다. 그런데 앞의 문제가 이 사실을 알려준다. 그러므로 다음과 같이 말 할 수 있다.

> Hopf fiber들은 서로 걸쳐있는 원이다.

문제 앞의 사상 $\psi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$는 Hopf fiber를 Hopf fiber로 보냄을 보여라.

22) 사원수의 곱으로 정의하였다.

제 3 장

쌍곡 평면의 기하

1. 선형분수변환
2. Poincaré 원판과 반평면
3. 민코프스키 공간과 쌍곡면
4. 가장 짧은 곡선
5. Cosine 법칙

3.1 선형분수변환

이 절의 목표

1. 실수의 cross ratio를 복소수로 확장하고 이를 사용하여 복소평면의 선형분수변환을 공부한다.
2. 선형분수변환의 대수학적, 기하학적 성질, 특히 등각성을 공부한다.

들어가기

사영직선에 대하여 알아보았던 cross ratio는 그 정의 그대로 복소수에 대하여도 사용할 수 있다. 실제로 cross ratio는 복소수에 대하여 사용하면 그 위력이 훨씬 커진다. 우리는 여기서 corss ratio의 몇 가지 기본적인 성질들을 알아보고 나간다. 이 절의 이론은 대부분 Ahlfors의 유명한 교과서 Complex Analysis를 따른다.

3.1.1 Cross Ratio

복소평면의 점은 복소수를 나타낸다. 우리는 단순히 복소평면이라고 부르고 $\mathbb{C}$라고 나타내지만 ∞를 같이 사용하려고 한다. 이 복소수 전체에 무한원점 ∞를 하나 추가한 공간을 복소사영직선이라 하고 $\mathbb{CP}^1$이라고 잘 나타낸다. 특히 이제부터 직선을 무한히 큰 원이라고 생각하여 필요에 따라 직선과 원을 통틀어 원이라고 부른다.

복소수에 대한 복비 $[z, z_2, z_3, z_4]$를

$$[z, z_2, z_3, z_4] = \frac{z - z_3}{z - z_4} \bigg/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

라고 정의하자. 이를 복소수 z의 함수라고 생각하고 Sz로 나타내기로 하자. 그러면 쉽게

$$Sz_2 = 1, \quad Sz_3 = 0, \quad Sz_4 = \infty$$

임을 확인할 수 있다. 또 Sz는 z에 대한 선형분수변환이다.

정리 3.1.1. *z_2, z_3, z_4를 각각 1, 0, ∞로 보내는 선형분수변환은 유일하다.*

(증명) 이러한 선형분수변환이 S, T 두 개 있다고 하자. 그러면

$$ST^{-1}1 = Sz_2 = 1, \quad ST^{-1}0 = 0, \quad ST^{-1}\infty = \infty$$

이다. 이제 이러한 선형분수변환을 $(az+b)/(cz+d)$라고 하자. 이제 $z = 1, 0, \infty$에서의 값을 계산하면 다음을 얻는다.

$$\frac{a+b}{c+d} = 1, \quad \frac{b}{d} = 0, \quad \frac{a}{c} = \infty$$

따라서 $b = c = 0$이고 $a = d$가 되어 이 함수는 항등사상 z이다. 그러므로 $S = T$이다. ■

따라서 다음 사실을 알 수 있다.

복비 $[z_1, z_2, z_3, z_4]$는 z_2, z_3, z_4를 각각 $1, 0, \infty$로 보내는 선형분수변환의 z_1에서의 값이다.

정리 3.1.2. 선형분수변환 T는 서로 다른 네 점 z_1, z_2, z_3, z_4에 대하여 복비를 보존한다. 즉, 다음이 성립한다.

$$[Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4].$$

(증명) $S(z) = [z, z_2, z_3, z_4]$라 하자. 그러면 ST^{-1}는 점 Tz_2, Tz_3, Tz_4를 각각 $1, 0, \infty$로 보낸다. 따라서

$$[Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4] = ST^{-1}(Tz_1) = Sz_1 = [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

이다. ■

정리 3.1.3. *cross ratio* $[z_1, z_2, z_3, z_4]$가 실수일 필요충분조건은 네 점 z_1, z_2, z_3, z_4가 하나의 원 (또는 직선) 위에 놓이는 것이다.

(증명) 네 점이 일직선 위에 있으면 물론 cross ratio가 실수이다. 그렇지 않은 경우라면 정의로부터 cross ratio의 편각은

$$\arg[z_1, z_2, z_3, z_4] = \arg \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} - \arg \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

을 만족시킨다. 만일 이 네 점이 원 위에 놓인다면 z_1 과 z_2 각각에서 나머지 두 점을 바라본 원주각은 그 크기가 같거나 서로 보각이 된다. 각의 방향까지 가늠하여 보면 이 두 각의 차는 0 또는 $\pm\pi$ 이다. 따라서 $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ 가 실수라는 사실과 동치임을 쉽게 알아볼 수 있다. ■

따름정리 3.1.4. 선형분수변환 T 는 원 또는 직선을 원 또는 직선으로 보낸다.

(증명) 주어진 원 또는 직선 C 위의 서로 다른 세 점 z_2, z_3, z_4 를 잡는다. C 위의 임의의 점 z 에 대하여 cross ratio $[z, z_2, z_3, z_4]$ 는 실수이다. 따라서 위의 정리에 의하여 cross ratio $[Tz, Tz_2, Tz_3, Tz_4]$ 도 실수가 된다. 그러므로 Tz 는 세 점 Tz_2, Tz_3, Tz_4 를 지나는 직선 또는 원 위에 놓인다. ■

3.1.2 원과 반전

복소 평면 위에서 두 점 z와 $\bar{z}$는 실수축(x축)에 대하여서로 대칭이다. 실수 계수를 가지는 선형분수변환은 실수축을 다시 실수축으로 보내며 두 점 z와 $\bar{z}$의 상도 서로 실수축에 대하여 대칭이다. 이러한 생각은 일반적인 선형분수변환의 경우에도 적용된다.

선형분수변환 T 가 실수축을 직선 또는 원 C 로 보낸다고 하자. 그러면 두 점 $w = Tz$ 와 $w^* = T\bar{z}$ 는 C 에 대하여 대칭 또는 반전의 위치에 놓인다. 이 사실을 알아보자.

우선 두 점 z 와 z^* 가 서로 다른 세 점 z_2, z_3, z_4 을 지나는 원 C 에 대하여 대칭이라 함은 $[z^*, z_2, z_3, z_4] = \overline{[z, z_2, z_3, z_4]}$ 을 말한다고 정의하자.

원 C 위의 점은 자기 자신과만 C 에 대하여 대칭이 된다. z 를 z^* 로 보내는 사상은 1대1 대응이 되며 이를 C 에 대한 반전이라고 부른다.

이제 이러한 반전의 상은 실제로 어떠한 점이 되는지 알아보자.

우선 C가 직선인 경우를 생각하자. 이 때 $z_4 = \infty$라고 잡으면 위의 대칭이 될 조건은

$$\frac{z^* - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{\overline{z} - \overline{z}_3}{\overline{z}_2 - \overline{z}_3} \tag{3.1}$$

와 같다. 이 식의 절대값을 잡으면 $|z^* - z_3| = |z - z_3|$가 성립한다. 이는 C 위의 모든 점 z_3에 대하여 성립하므로 z와 z^*는 C의 모든 점에서 같은 거리만큼 떨어져 있다. 한편 (3.1)로 부터

$$\operatorname{Im} \frac{z^* - z_3}{z_2 - z_3} = -\operatorname{Im} \frac{z - z_3}{z_2 - z_3}$$

이다. 따라서 z와 z^*는 C에 대하여 서로 반대 쪽에 놓인다. 이로부터 z와 z^*가 C에 대한 대칭점임을 알 수 있다.

이제 C가 중심이 a이고 반지름이 R인 원인 경우를 살펴 보자. cross ratio가 함수 $1/z$에 의하여 보존되므로 간단한 계산에 의하여

$$\begin{aligned}
\overline{[z, z_2, z_3, z_4]} &= \overline{[z - a, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a]} \\
&= \left[\overline{z} - \overline{a}, \frac{R^2}{z_2 - a}, \frac{R^2}{z_3 - a}, \frac{R^2}{z_4 - a}\right] \\
&= \left[\frac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}}, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a\right] \quad \text{빈 쪽} \\
&= \left[\frac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}} + a, z_2, z_3, z_4\right]
\end{aligned}$$

이 된다. 따라서

$$z^* = \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}} + a$$

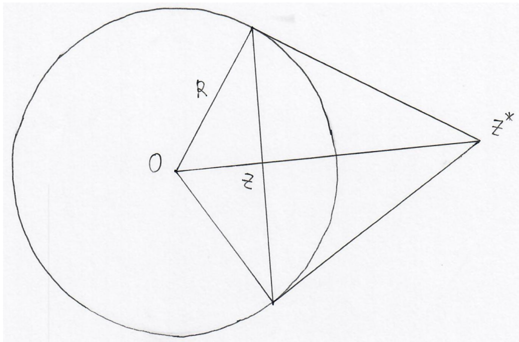
임을 알 수 있다. 이 말은

$$(z^* - a)(\overline{z} - \overline{a}) = R^2$$

과 동치이다. 이 관계식에서

$$|z^* - a| \cdot |z - a| = R^2$$

임을 알 수 있다. 한편 두 복소수의 비 $(z^* - a)/(z - a)$가 양수가 되므로 두 점 z와 z^*는 중심 a에서 뻗어나가는 하나의 반직선 위에 놓인다. 이러한 관계는 다음 그림과 같이 이해할 수 있으며 고전기하에서는 이 때 z^*를 C에 대한 z의 반전이라고 부른다. 즉 우리의 반전은 고전 기하의 반전과 일치한다.



이로 부터 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

정리 3.1.5. 선형분수변환 T가 원 C_1을 원 C_2로 보낼 때 C_1에 대하여 대칭인 두 점의 상은 C_2에 대하여 대칭이다. 즉, 다음이 성립한다.

$$Tz^* = (Tz)^*.$$

문제 이 사실을 증명하여라. (힌트: C_1을 실수축으로 보내는 선형분수변환을 생각하여라.)

선형분수변환의 대칭성을 잘 활용하면 많은 문제를 쉽게 풀 수 있다.

문제 앞의 사영기하에서 공부한 선형분수변환과 cross ratio에 대한 모든 이야기를 복소사영직선과 복소 cross ratio로 바꾸어 이야기할 수 있음을 생각하여 보아라.

3.1.3 함수 $1/z$의 등각성

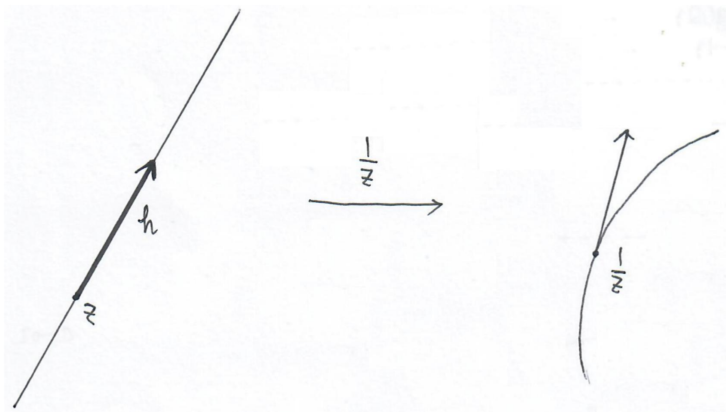
함수 $1/z$는 복소수 변수 z에 대하여 복소수 값을 갖는 함수이다. 이 함수는 정의역 전체에서 미분가능한 함수이며 특히 복소미분 가능하다.[1)]

1) 복소미분가능하다는 말의 뜻은 미적분학에서 공부한 미분가능성을 복소수에 대하여 확장한 개념이다. 학부에서 개설되는 복소함수론에서 이에 대한 많은 재미있는 내용을 공부할 수 있다.

이러한 함수는 정의역과 치역이 모두 $\mathbb{C}$의 열린 영역이므로 실제로는 평면의 열린 영역에서 평면으로의 사상이라고 볼 수 있으며, 복소수의 실수부 허수부를 평면의 두 좌표라고 생각하면 평면을 벡터로 나타내는 것이나 복소수로 나타내는 것이나 기하학적으로는 별 차이가 없다는 것을 알 수 있다.

그러나 벡터를 사용하는 것과 복소수를 사용하는 것은 때로는 많은 차이가 있으며 우리는 필요에 따라서 이것 저것 번갈아 사용한다.

복소평면 위에 주어진 직선 $z + th$를 생각하자. 이 직선은 $t = 0$일 때 점 z를 지나며 h 방향으로 놓여 있다. 이제 $1/z$에 의한 이 직선의 상을 생각하자.[2)]



이제 z에서 직선이 나아가는 방향 (속도)는 h이다. 그러면 그 상인 $1/z$에서 그 곡선의 상이 나아가는 속도는 어떻게 되는가? 이는 간단히 t에 대하여 미분하여 보면 된다. 벡터로 표현하면 복잡하겠지만 복소수로 표현하면 다음과 같은 계산이 된다. 미분의 정의를 사용하면

$$\frac{1}{z+th} - \frac{1}{z} = -t\frac{h}{z(z+th)} = -t\frac{h}{z^2} + o(t)$$

이다. 따라서

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \frac{1}{z+th} = -\frac{h}{z^2}$$

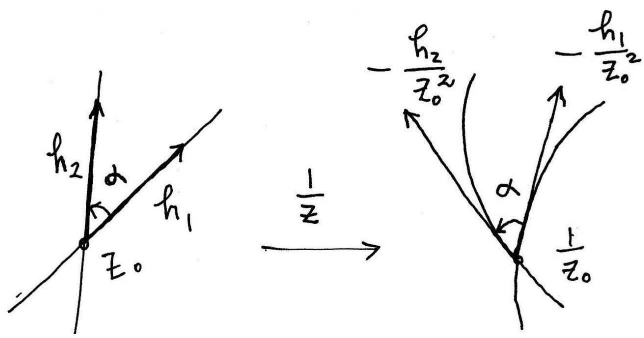
2) 이 직선의 상은 원이거나 직선이다.

이다.

정리 3.1.6. 복소함수 $1/z$는 각을 보존한다.[3)]

(증명) 이 정리는 다음을 뜻한다. $\mathbb{C}$에서 z_0에서 각 α로 만나는 두 직선이 있을 때 이 두 직선의 함수 $1/z$에 의한 상은 $1/z_0$에서 같은 각 α로 만난다.

이를 증명하기 위하여 두 직선의 방정식을 각각 $z_0 + th_1$, $z_0 + th_2$라고 하자. 그러면 이 두 직선의 상이 $1/z_0$에서 갖는 속도 벡터는 각각 $-h_1/z_0^2$과 $-h_2/z_0^2$이 된다.



이 두 복소수가 나타내는 방향 사이의 각을 재려면 이 두 복소수의 비를 계산하여 그의 편각 재면 된다.

$$\frac{h_1/z_0^2}{h_2/z_0^2} = \frac{h_1}{h_2}$$

이므로 이 복소수의 편각은 두 방향 h_1, h_2가 이루는 사이각이 되며 따라서 주어진 직선 사이의 각과 일치한다. 즉 복소함수 $1/z$는 각을 보존한다. ■

사영기하에서의 계산을 따라서 선형분수변환

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\frac{1}{z+\dfrac{d}{c}}$$

3) 실제로 복소수 미분가능한 모든 함수는 미분계수가 0이 아닌 모든 점에서 각을 보존한다. 각을 보존하는 사상을 등각사상(conformal map)이라 부른다.

를 보면 $f(z)$는 네 개의 사상

$$f_1(z) = z + \frac{d}{c}, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = \frac{ad - bc}{c^2} z, \quad f_4(z) = \frac{a}{c} - z$$

을 차례로 합성한 함수이다. 여기서 평행이동과 닮음사상 f_1, f_3, f_4가 각을 보존함은 당연한 사실이다. 사상 f_2가 각을 보존한다는 것을 증명하였으므로 모든 선형분수변환은 각을 보존함을 알 수 있다.

3.2 Poincaré 원판과 반평면

이 절의 목표

1. 비유클리드 기하의 대표격인 쌍곡평면의 기하를 공부한다.
2. 단위 원판 위의 선형분수변환의 꼴과 그 기하학적 성질을 공부한다.
3. 입체사영을 사용하여 상반평면 위의 쌍곡기하 모형을 알아본다.

들어가기

19세기 말에 포앙카레(Poincaré)는 복소함수론을 연구하면서 그 동안 논란이 많았던 비 유클리드 기하학의 존재 문제에 대하여 놀라운 아이디어를 내었다. 즉 비유클리드 기하학이 성립하는 기하를 유클리드 기하 안에서 만들어내어 모형으로 주었다. Poincaré는 두 가지 모형을 주었으며 이것은 쌍곡기하학을 공부하는데 가장 기본이 되는 모형이다. Poincaré는 물리적으로 이러한 기하가 가능함을 보여주는 물리적 상황도 설명하였다.

쌍곡 평면 위에서의 기하는 특별히 복잡하다. 이 이유는 우리가 쌍곡평면의 각 점에서의 크기를 직접 볼 수 있는 모형이 없기 때문이다. 실제로 우리 눈에 보이게 쌍곡 평면을 $\mathbb{E}^3$ 안에 만들려고 하면 쌍곡평면의 일부분만을 보이게 할 수 있다. 그리고 이 일부분만 보이는 모형은 쌍곡평면의 많은 좋은 성질을 잘 보여주지 못한다. 그래서 비록 벡터의 크기가 왜곡되지만 각도만은 제대로 보여주는 모형인 원판과 상반평면을 잘 사용한다.

유클리드 평면 위의 단위 원판을 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$라고 하자. 포앙카레의 생각을 따라서 이 단위 원판 위에 자체로 하나의 기하를 만들기 위해서 이 곡면 위의 곡선의 길이를 보통 사용하던 유클리드 평면에서의 곡선의 길이와는 다르게 재는 방법을 생각하여 본다.

3.2.1 원판의 선형분수변환

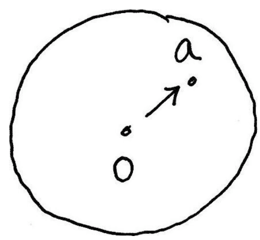
이제 D를 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$의 단위 원판이라고 생각하자. 그리고 D의 점을 모두 복소수를 써서 나타내기로 하자. 즉, $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$이다. 단위 원판을 보존하는 선형분수변환에 대하여 알아보기로 하자.

도움정리 3.2.1. 선형분수변환 T가 $T0 = 0$이고 D를 자기자신으로 보내는 *1*대*1* 대응이면, $|\lambda| = 1$인 λ가 존재하여 $Tz = \lambda z$이다.

(증명) $Tz = (az+b)/(cz+d)$라 놓자. $T0 = 0$이므로 $b = 0$이 된다. 한편 선형분수변환은 대칭점인 ∞도 ∞로 보낸다. 따라서 $a/c = \infty$가 되므로 $c = 0$이다. 따라서 $Tz = (a/d)z$이다.

T는 D의 경계를 경계로 보내야 하므로, $|T1| = 1$이다. 따라서 $|a/d| = 1$이다. ■

도움정리 3.2.2. 복소수 a가 $|a| < 1$을 만족시킬 때 선형분수변환 $T(z) = \dfrac{z+a}{\overline{a}z+1}$은 단위 원판 D를 자기 자신으로 보내는 *1*대*1* 대응이다.



(증명) $\left|\dfrac{z+a}{\overline{a}z+1}\right|$와 1의 크기를 비교하기 위하여 다음 계산을 보자.

$$|z+a|^2 - |\overline{a}z+1|^2 = -(1-|z|^2)(1-|a|^2)$$

이 식의 값은 $|z|$의 값이 1보다 작은가 큰가에 따라 0보다 작거나 커진다. 즉, $|z| < 1$이면 $|Tz| < 1$이고, $|z| = 1$이면 $|Tz| = 1$이고, $|z| > 1$이면 $|Tz| > 1$이다. 즉 T은 D의 내부는 내부로, D의 외부는 외부로, 그리고 D의 경계는 경계로 보내는 1대1 대응이다. ■

정리 3.2.3. D를 자기 자신으로 보내는 *1대1* 대응 선형분수변환 T는 항상 다음 꼴이다:

$$Tz = e^{i\theta}\frac{z+a}{\overline{a}z+1}, \quad |a| < 1.$$

(증명) T는 단위원을 단위원으로 보낸다. 이제 $T0 = a$라 하면 $|a| < 1$이 되고 단위원에 대하여 0과 대칭인 ∞는 a의 대칭점인 $1/\overline{a}$로 대응된다. 이제 도움정리 3.2.2에 의해 합성사상

$$\varphi(z) = \frac{Tz - a}{-\overline{a}Tz + 1}$$

을 생각하면 이 사상은 D를 자기자신으로 보내는 1대1 사상이다. 또 $\varphi(0) = 0$이다. 따라서 도움정리 3.2.1에 의해 $\varphi(z) = \lambda z$ $(|\lambda| = 1)$이다. 이 식에서 Tz를 풀면

$$Tz = \frac{\lambda z + a}{\overline{a}\lambda z + 1} = \lambda\frac{z + a\overline{\lambda}}{\overline{a}\lambda z + 1}$$

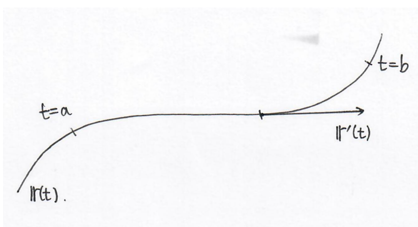
이다. 따라서 정리의 형태임을 알 수 있다. ■

3.2.2 원판의 기하

우리가 곡선의 길이를 재는 방법은 곡선의 접벡터의 크기를 적분해서 얻는 것이다. 즉 $\mathbf{r}(t)$가 구간 $[a, b]$에서 $\mathbb{R}^2$의 미분가능한 곡선이라고 하면 이 곡선의 길이 L은

$$L := \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$$

로 정의된다. 이 때 속도벡터의 크기인 $\|\mathbf{r}'(t)\|$는 벡터의 유클리드 크기를 잰다.



그러나 우리는 이 크기를 다른 크기로 바꾸려고 한다. 어떻게 하는 방법이 있는가? 우리는 앞에서 공부한 D를 D로 1대1 대응으로 보내는 선형분수변환이 모든 곡선의 속력을 변하지 않게 하는 방법을 찾으려고 한다.

우리가 평면의 점을 복소수로 나타내기로 하였으므로 위의 이야기는 구간 $[a, b]$에서 정의된 $\mathbb{C}$ 위의 곡선 $z(t) = x(t) + iy(t)$가 미분가능할 때 이 곡선의 길이 L은

$$L := \int_a^b |z'(t)|\, dt$$

이다. 따라서 우리는 각 점 z에서 복소수 값으로 정의되는 이점에서의 속도벡터의 크기를 어떻게 잴 것인가를 생각한다. 우선

원점 0에서의 벡터의 크기는 유클리드 때의 두 배로 재기로 하자.

즉 점 0에서의 속도벡터가 복소수로 α이면 이 벡터의 크기는 $2|\alpha|$이다. 이제

원점에서의 속도 벡터를 점 $a(|a| < 1)$로 D를 보존하는 선형분수변환을 사용하여 옮겨보았을 때 그 속도의 크기가 변하지 않도록 하려면 점 a에서는 벡터의 크기를 어떻게 재야 하는가?

이 질문에 대답하기 위하여 선형분수변환은 속도벡터를 어떻게 보내는가를 알아야 한다. 원점을 지나며 속도가 h인 직선은 th라고 나타낼 수 있다. 이 직선을 0을 a로 보내는 선형변환

$$Tz = \frac{z + a}{\overline{a}z + 1}$$

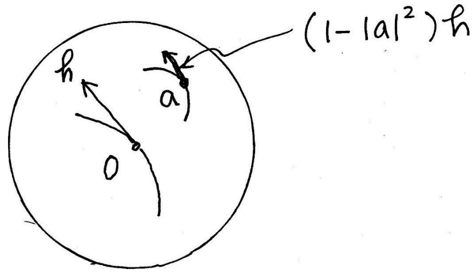
에 의하여 사상하면 그 상은

$$T(th) = \frac{th + a}{\overline{a}th + 1}$$

이 된다. 미분하면

$$\frac{d}{dt}T(th) = \frac{(1 - |a|^2)h}{(\overline{a}th + 1)^2}$$

이 되므로 $t = 0$일 때는 이 속도 벡터는 $(1 - |a|^2)h$가 된다.



따라서 원점에서의 움직임은 a로 옮겨왔을 때, 그냥 유클리드 식으로 그 크기를 계산하면 속력이 $(1-|a|^2)$ 배가 됨을 알 수 있다. 따라서 속력이 변하지 않게 하려면 점 a에서는 속도벡터의 크기를 원점에서 재던 방식의 $1/(1-|a|^2)$ 배로 계산하지 않으면 안된다. 즉, 우리가 원하는 새로운 방식으로 곡선 $z(t)$의 길이를 계산하는 공식은

$$L = \int_a^b \frac{2|z'(t)|}{1-|z|^2}\, dt$$

과 같이 되어야 한다.

이 적분으로 길이를 재기로 할 때 복소평면의 단위 원판을 Poincaré disk라고 부르고 $\mathbb{H}^2_D$ 로 나타내기로 하자.

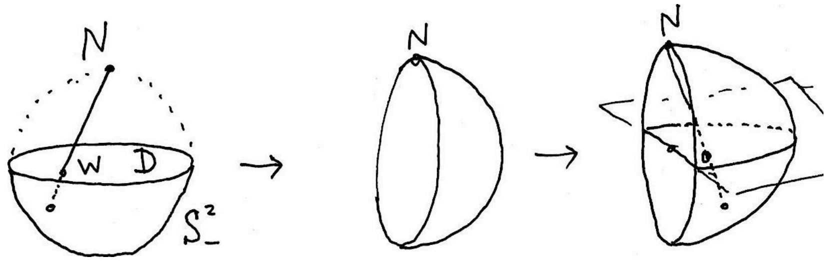
3.2.3 입체사영과 단위 원판

우리는 앞에서 입체사영을 통해서 평면의 점을 구면 위에 대응시켰다. 이 대응에 의하여 단위 원판 위의 점 $w = u + iv$ $(|w| < 1)$는 단위 구면 위의 다음 점에 대응됨을 알고 있다.

$$(x, y, h) = \left(\frac{2u}{|w|^2+1}, \frac{2v}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1} \right).$$

특히 단위 원판 D는 단위 구면의 남반구 $\mathbb{S}^2_-$ 에 대응된다. 이제 이 구면을 x축을 축으로 하여 $-\pi/2$만큼 회전시키자. 그러면 남반구는 단위구면 중에서 $y > 0$인 반구 부분으로 옮겨진다. 이 반구를 북극점에서 입체사영하여 보자. 그러면 그 상은 복소 평면 위에서 $v > 0$ 즉, $\mathrm{Im}\, w > 0$인 상반평면이 된다. 이 상반평면에서

벡터의 크기를 잴 때 원래의 $\mathbb{H}^2_D$에서 재던 것과 똑 같은 방법으로 재기로 하면 이 상반평면을 포앙카레의 상반평면 모델이라고 부르고 $\mathbb{H}^2_H$로 나타내기로 한다.



이제 이 상반평면에서의 벡터의 길이는 어떻게 재게 되는가?

D의 점 $w = u + iv$를 입체사영하여 얻은 점 (x, y, h)를 x축에 대하여 $\pi/2$만큼 회전하여 얻은 점의 좌표는

$$(x, -h, y) = \left(\frac{2u}{|w|^2+1}, -\frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}, \frac{2v}{|w|^2+1} \right)$$

가 된다. 이제 이것을 다시 북극점에서 입체사영하면 그 좌표는

$$\frac{1}{1-y}(x, -h) = \frac{(2u, 1-|w|^2)}{1-2v+|w|^2} = \frac{2u+(1-|w|^2)i}{1-2v+|w|^2}$$

이 된다.

$$2u + (1-|w|^2)i = -i(w+i)(\overline{w}+i),$$
$$1 - 2v + |w|^2 = |w-i|^2 = (w-i)(\overline{w}+i)$$

이므로 이 좌표는 복소수로 다시 쓰면

$$z = f(w) = -i\frac{w+i}{w-i}$$

라는 간단한 식으로 표시된다. 즉, 선형분수변환을 쓰면 단위원판 D를 상반평면 $\mathbb{H}^2_H$으로 보낼 수 있다.

이제 벡터의 크기는 어떻게 재야 $\mathbb{H}^2_D$에서 재던 것과 같은 식으로 재는 것이 되는가? 이제 $a \in \mathbb{H}^2_D$에서 속도 h로 움직이는 직선의 $f(w)$에 의한 상은 어떤 속도 벡터 $\tilde{h}$를 가지는가를 계산하면 된다. 앞에서와 마찬가지 방법으로 계산하면

$$\tilde{h} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(a+th) = \frac{-2h}{(w-i)^2}$$

이다. 따라서 이 속도 벡터의 유클리드식 크기는 $2|h|/|w-i|^2$가 된다. 원래 속도 벡터 h의 크기는 $2|h|/(1-|w|^2)$가 되어야 하므로 따라서 이 점 $z = f(w)$에서 제대로 잰 벡터 $\tilde{h}$의 크기도

$$\frac{2|h|}{1-|w|^2} = \frac{|w-i|^2}{1-|w|^2}\frac{2|h|}{|w-i|^2}$$

가 되어야 한다. 따라서 이 점 z에서의 유클리드식 거리에 $|w-i|^2/(1-|w|^2)$를 곱해주어야 한다.

이 인수는 z로 표현하면 어떻게 되는가? $z = -i(w+i)/(w-i)$이므로 w에 대하여 풀면

$$w = i\frac{z-i}{z+i}$$

를 얻는다. 계산해 보면

$$|w-i|^2 = \frac{4}{|z+i|^2}, \quad 1-|w|^2 = \frac{2(i\bar{z}-iz)}{|z+i|^2} = \frac{4y}{|z+i|^2}$$

이 되므로 $\mathbb{H}^2_H$의 한 점 z에서 속도벡터 $\tilde{h}$의 크기는

$$\frac{|w-i|^2}{1-|w|^2}|\tilde{h}| = \frac{1}{y}|\tilde{h}| = \frac{1}{\mathbf{Im}\, z}|\tilde{h}|$$

가 되어야 한다.

3.3 민코프스키 공간과 쌍곡면

이 절의 목표

1. 로렌츠 민코프스키 공간의 정의를 알아보고 이 공간의 내적과 노옴, 그리고 거리를 보존하는 로렌츠 (직교) 변환에 대하여 공부한다.

2. 로렌츠 공간에서의 입체사영을 계산하여 보고 이 사영에 의하여 원판 모형과 쌍곡면 모형이 같은 기하를 가지고 있음을 알아본다.

들어가기

벡터 공간 $\mathbb{R}^3$ 의 벡터들 사이의 내적을 정의하는데 양정치(positive definite)가 되어야 한다는 성질을 요구하지 않아서 이 내적을 정의하는 행렬의 eigenvalue 가운데 하나가 음수가 되도록 한 공간을 생각할 수 있다. 간단히 세 좌표 (x, y, z) 에 대하여 벡터의 크기의 제곱에 해당하는 양을 $x^2 + y^2 - z^2$ 으로 주기로 하면 이는 우리가 알고 있는 노옴이 되지는 않지만 그런대로 계산이 복잡하지 않은 대상이 된다. 이러한 새로운 공간은 Einstein 덕분에 물리학에서 매우 중요한 공간으로 등장하였다. 그러나 이 공간의 이름은 수학에서 이 공간을 먼저 연구한 민코프스키(Minkowski)와 이 공간을 사용해서 전자기학을 연구한 로렌츠(Lorentz)의 이름을 붙인다.

이 공간은 우리가 지금까지 다루던 공간들과는 매우 다른 기하를 가지고 있다. 예를 들어 위에서 정의한 벡터의 크기는 노옴의 성질을 모두 가지고 있지 않다. 그러나 이 공간의 일부 벡터만 생각하면 노옴과 유사한 성질을 가지고 있다. 우리는 이 공간의 모든 기하를 공부할 것은 아니다. 단지 쌍곡 평면을 이해하기 위하여 필요한만큼만 공부할 것이다.

3.3.1 (Lorentz-)Minkowski 공간과 로렌츠 변환

$(a,b,c),(a',b',c') \in \mathbb{R}^3$ 에 대하여 다음과 같은 내적을 생각하자:

$$\langle (a,b,c),(a',b',c')\rangle_L := aa' + bb' - cc' = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}.$$

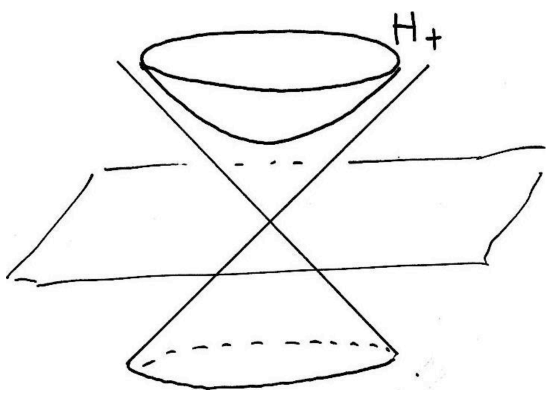
이를 내적으로 사용하면 벡터의 크기는

$$\|(a,b,c)\|_L = \sqrt{|a^2+b^2-c^2|}$$

라고 정의하게 된다. 이러한 내적과 벡터의 크기를 준 공간을 (Lorentz-)Minkowski 공간이라 부르고 $\mathbb{L}^3$ 로 나타낸다.

이 공간에서 다음 곡면을 생각하자.

$$H_+ = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2-z^2 = -1,\ z>0\}.$$



이 곡면은 2엽쌍곡면 가운데 위쪽의 곡면을 나타낸다. 이 곡면은 마치 유클리드 공간에서 구면을 보는 것과 유사하다. 이 곡면은 $\mathbb{L}^3$ 에서 보면 원점에서 거리가 1(i?) 인 점들을 모아 놓은 것이다. 따라서 이를 $\mathbb{L}^3$ 의 구면이라고 부른다. 사실 구면은 이 2엽쌍곡면 말고도 $x^2+y^2-z^2=1$ 로 주어지는 1엽쌍곡면까지 합해서

생각해야 한다. 그러나 이 두 곡면은 질적으로 다른 점들로 이루어져 있어서, 필요에 따라 이 가운데 한 쪽만을 잡아 사용한다.

이제 $\mathbb{E}^3$의 직교변환과 같이 모든 벡터의 크기를 보존하고 구면을 보존하는 변환은 $\mathbb{L}^3$에는 없을까?

있다. 우선 이론적으로 생각해보자. $\mathbb{E}^3$의 경우와 같이 이러한 선형변환을 행렬 A로 내타낸다고 하자. 그러면 벡터 $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$에 대하여

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle_L = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle_L$$

즉,

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

라 할 때,

$$\mathbf{x}^T J\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T JA\mathbf{x} = \mathbf{x}^T A^T JA\mathbf{x}$$

가 항상 성립해야 한다는 말이다. 전에 알아본 바와 같이 이렇게 되는 방법은 $A^T JA = J$가 성립해야 한다. 이러한 행렬을 로렌츠 직교행렬이라고 부르고 이러한 행렬의 모임을 $O(2,1)$으로 나타낸다. $O(2,1)$은 행렬의 곱셈에 대하여 군을 이룬다. 우리는 $O(2,1)$ 가운데 H_+를 보존하는 것만을 보고 싶고 이것들을 모은 것은 $O(2,1)^\uparrow$으로 나타낸다.

이런 것들은 어떤 행렬인가? 좀 더 알아보기 위하여 우선 평면에서 살펴보자.

평면에 내적 $\langle (a,b), (a',b')\rangle_L := aa' - bb'$을 주고 이에 따른 벡터의 크기를 $\|(a,b)\|_L = \sqrt{|a^2 - b^2|}$를 준 공간 $\mathbb{L}^2$에서 벡터의 크기와 내적을 보존하는 선형변환은 어떤 행렬로 나타나는가?

이 행렬을 A라고 하면 $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^T JA = J$를 만족시켜야 한다.

문제 이 조건을 만족시키는 A의 열벡터는 $\mathbb{L}^2$의 내적에 대하여 서로 수직이고 길이가 1임을 보여라.

따라서 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면

$$a^2 - c^2 = 1, \quad b^2 - d^2 = -1, \quad ab - cd = 0$$

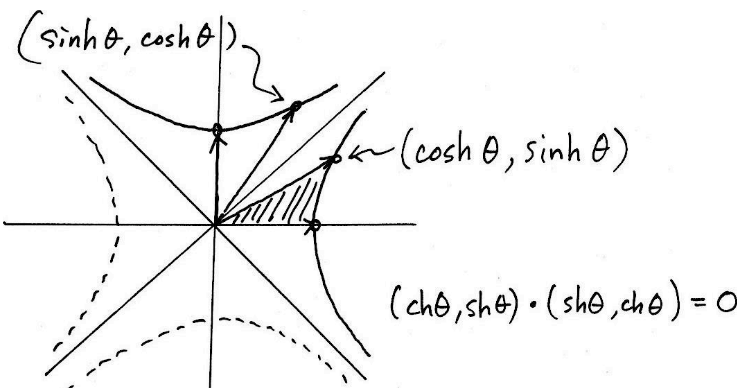
이다. 그러면

$$a = \cosh\theta, \quad c = \sinh\theta, \quad b = \sinh\phi, \quad d = \cosh\phi$$

라고 놓을 수 있다. 이제 마지막 조건에서 $\cosh\theta\sinh\phi = \sinh\theta\cosh\phi$이므로 $\tanh\theta = \tanh\phi$가 되어 $\theta = \phi$이다. 즉

$$A = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$

꼴임을 알 수 있다. 이것이 유클리드 평면의 회전에 해당하는 유명한 로렌츠변환이다.



이 때 빗금친 부분의 넓이는 어떻게 되는가? 간단히 적분으로 나타내면

$$\frac{1}{2}\cosh\theta\sinh\theta - \int_1^{\cosh\theta} \sqrt{x^2 - 1}\, dx$$

이다. 여기서 $x = \cosh t$라 치환하면 적분은

$$\int_1^{\cosh\theta} \sqrt{x^2 - 1}\, dx = \int_0^{\theta} \sinh^2 t\, dt = \int_0^{\theta} \frac{\cosh 2t - 1}{2} dt = \frac{1}{4}\sinh 2\theta - \frac{\theta}{2}$$

이 되므로 넓이는 $\theta/2$이다. 구면의 경우와 비교하여 보아라.

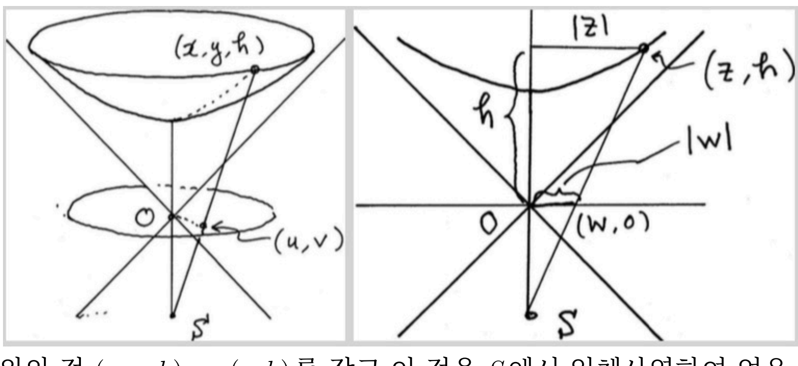
이제 $\mathbb{L}^3$에서 좌표 평면에 평행한 움직임을 주는 경우의 로렌츠 변환을 알아보자. 예를 들어 y축을 고정 시키고 xz평면에 평행한 움직임을 준다면 xz평면 위에서만 보면 앞절의 2차원 로렌츠 변환이 될 것이다. 따라서 이 때의 행렬의 모습은 다음과 같다:

$$\begin{pmatrix} \cosh\theta & 0 & \sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh\theta & 0 & \cosh\theta \end{pmatrix}.$$

일반적인 모습을 행렬로 나타내면 세 개의 서로 수직인 단위벡터들로 주어지게 된다. 이 때 세 번째 열벡터는 길이 제곱에 해당하는 값이 -1이 되어야 한다.

3.3.2 $\mathbb{L}^3$의 입체사영

구면에서와 마찬가지로 쌍곡면 위의 점도 한 점(극점)에서 입체사영을 할 수 있다. 이를 계산하여 보자. 다음 그림과 같이 극점 $S(0,0,-1)$에서 H_+를 (u,v)좌표를 가지는 xy평면으로 입체사영하여 보자.



H_+ 위의 점 $(x,y,h) = (z,h)$를 잡고 이 점을 S에서 입체사영하여 얻은 xy평면 위의 점을 $w = u + iv = (u,v)$라고 하기로 하자. 그러면 닮은삼각형에서 $1/|w| = (1+h)/|z|$가 성립하므로

$$|z| = (1+h)|w|, \quad |w| = \frac{|z|}{1+h}$$

이다. 따라서

$$w = (u, v) = \frac{|w|}{|z|}(x, y) = \left(\frac{x}{1+h}, \frac{y}{1+h}\right) = \frac{z}{1+h}$$

가 성립한다. 한편, $h^2 - 1 = |z|^2 = |w|^2(1+h)^2$ 이므로 $h - 1 = |w|^2(h+1)$ 이다. 이것을 h 에 대하여 풀면

$$h = \frac{1+|w|^2}{1-|w|^2} = \frac{1+u^2+v^2}{1-u^2-v^2}, \quad 1+h = \frac{2}{1-|w|^2} = \frac{2}{1-u^2-v^2} \tag{3.2}$$

을 얻는다. $z = (1+h)w$ 이므로 다음과 같은 표현을 얻게 된다.

$$(z, h) = ((1+h)w, h) = \frac{(2u, 2v, 1+u^2+v^2)}{1-u^2-v^2} = \frac{(2w, 1+|w|^2)}{1-|w|^2}.$$

이 입체사영은 H_+ 의 모든 점을 단위 원판 D 로 보내는 1대1 대응이다. 그러므로 D 의 선형분수변환이 H_+ 에서 어떤 꼴로 나타내어지는가가 궁금하다. 우선 D 에서 원점에 대한 회전은 당연히 H_+ 에서는 h 축에 대한 회전이 된다. 그러니까 D 를 자기자신으로 보내는 선형분수변환 가운데 다음 꼴의 것이 H_+ 에서는 어떠한 변환이 되는가만 보면 충분하다:

$$f(w) = \frac{w+a}{\overline{a}w+1}.$$

$w \in D$ 라고 하고 $f(w) = \alpha$ 라고 하자. 그러면 f 에 의하여 $w \mapsto \alpha$ 이므로 궁금한 것은 사상

$$(z, h) = \frac{(2w, 1+|w|^2)}{1-|w|^2} \mapsto \frac{(2\alpha, 1+|\alpha|^2)}{1-|\alpha|^2}$$

는 어떤 사상인가 하는 것이다. 직접 계산하면

$$\begin{aligned}
&\frac{\big(2\alpha, 1+|\alpha|^2\big)}{1-|\alpha|^2} \\
&= \frac{\big(2(w + a^2\overline{w} + a(1+|w|^2)), 2(a\overline{w} + \overline{a}w) + (1+|a|^2)(1+|w|^2)\big)}{(1-|a|^2)(1-|w|^2)} \\
&= \frac{\big(z + a^2\overline{z} + 2ah, (a\overline{z} + \overline{a}z) + (1+|a|^2)h\big)}{1-|a|^2}
\end{aligned}$$

가 된다. 이 식을 자세히 보면 $(z, h) = (x, y, h)$ 의 1차함수라는 것을 알 수 있다. 즉 이 사상은 H_+ 를 자기 자신으로 보내는 선형사상이다. 그리고 우리는 위에서 H_+ 를 자기 자신으로 보내는 선형사상은 벡터의 크기를 보존해야 하므로 로렌츠 직교사상(로렌츠변환)뿐임을 알고 있다. 따라서 다음 정리를 얻는다.

정리 3.3.1. D를 자기 자신으로 보내는 선형분수변환은 $\mathbb{L}^3$의 입체사영에 의하여 H_+를 자기 자신으로 보내는 로렌츠 변환으로 대응된다.

이제 입체사영으로 비교해 볼 때 $\mathbb{H}^2_D$에서의 속도 벡터의 크기와 H_+에서의 속도 벡터의 크기는 어떤 관계가 있는가? 이를 위해서 H_+ 위의 미분가능한 곡선 $(x(t), y(t), h(t))$를 생각하자. 그러면 이 세 좌표함수는 다음과 같은 관계를 가지고 있다:

$$x^2 + y^2 - h^2 = -1, \quad xx' + yy' - hh' = 0. \tag{3.3}$$

이제 이 곡선의 입체사영에 의한 상은 $(u, v) = (x, y)/(1 + h)$이므로 $\mathbb{H}^2_D$에서 이 곡선의 속도 벡터는

$$\left(\left(\frac{x}{1+h}\right)', \left(\frac{y}{1+h}\right)'\right) = \frac{\big(x'(1+h) - xh', y'(1+h) - yh'\big)}{(1+h)^2}$$

이다. 이 벡터의 크기를 $\mathbb{H}^2_D$에서 재려면 이 벡터의 유클리드 크기에 $2/(1 - |w|^2)$을 곱해주면 된다. (3.2)를 사용하여 이 벡터의 크기의 제곱을 계산하면

$$(1+h)^2 \frac{(x'(1+h) - xh')^2 + (y'(1+h) - yh')^2}{(1+h)^4} = (x')^2 + (y')^2 - (h')^2$$

이 되어 $\mathbb{H}^2_D$에서의 속도벡터의 크기나 H_+ 위에서의 대응되는 속도벡터의 $\mathbb{L}^3$에서의 크기가 일치한다. 즉, 다음 정리를 얻는다.

정리 3.3.2. $\mathbb{L}^3$ 안에서 입체 사영은 H_+를 $\mathbb{H}^2_D$로 보내는 사상으로 볼 때 벡터의 크기와 각을 모두 보존한다. 따라서 이런 관점에서 H_+도 쌍곡 평면의 하나의 모형이 된다.

$\mathbb{L}^3$의 벡터 크기를 사용하여 H_+의 기하를 생각할 때 이 모형을 쌍곡면(hyperboloid) 모형이라 부르고 $\mathbb{H}^2_L$로 나타내기로 하자. 그리고 지금까지 공부한 여러 모형들 $\mathbb{H}^2_D$, $\mathbb{H}^2_H$, $\mathbb{H}^2_L$가 공동적으로 나타내는 쌍곡평면을 $\mathbb{H}^2$로 나타내기로 한다.

3.4 가장 짧은 곡선과 삼각형의 넓이

이 절의 목표

1. 원판의 선형분수변환을 이용하여 쌍곡평면의 직선의 모양을 공부한다.
2. 쌍곡기하의 상반평면 모형을 사용하여 쌍곡삼각형의 넓이 공식을 유도한다.

들어가기

사영기하에서는 왜곡된 기하를 최대한 잘 볼 수 있도록 사영평면의 직선이 이 모형들에서 어떠한 모양으로 나타나는가를 아는 것이 중요하다. 이를 위해서 다음 질문을 생각하자. 쌍곡 평면에서 모든 점 사이의 거리를 보존하는 그런 변환은 얼마나 많은가? 이를 잘 알기 위해서는 두 점 사이의 거리가 무엇인가를 잘 이해해야 한다. 지금까지 우리가 공부한 유클리드 공간이나 구면과 같은 것에서 두 점 사이의 거리는 유클리드 공간 안에 놓여 있으므로 비교적 직관적으로 이해할 수 있었다. 그러나 쌍곡평면은 사정이 좀 다르다. 우리는 쌍곡평면을 직접 본 일이 없다. 오히려 원판이나 상반평면과 같은 곳을 적절히 변형시켰다고 생각하면서 상상할 뿐이다. 그러니까 두 점 사이의 거리를 어떻게 재야 할까도 다시 생각해 봐야 한다.

유클리드 기하에서는 두 점을 잇는 직선의 길이를 두 점 사이의 거리로 생각했었다. 이것은 옳은 것이지만 우리는 두 점을 잇는 직선이 무엇인지를 모른다. 모를 뿐만 아니라 이 직선을 찾기 위해서 두 점 사이의 거리를 생각하는 것이기도 하다.

우리가 복잡한 도시에서 한 지점에서 다른 지점까지 가는 가장 빠른 길을 찾는다고 하자. 어떻게 하는가? 아무것도 모르면 이 두 지점 사이를 여러 방법으로 가보면서 가장 빠른 길을 찾아야 한다. 여기서도 마찬가지다. 두 점을 잇는 곡선들의 길이를 보면서 가장 짧은 곡선을 찾아서 이것이 두 점 사이의 거리다라고 말하는 수 밖에 없다.

3.4.1 쌍곡 평면의 isometry와 가장 짧은 곡선

쌍곡평면의 거리를 보존한다면 물론 그 위의 곡선들의 길이를 보존한다. 그런데 두 점 사이의 거리가 그 두 점을 잇는 곡선의 길이 가운데서 가장 짧은 것이라고 한다면 이 곡선의 길이를 보존하면 두 점 사이의 거리도 그대로 보존될 것이다. 따라서 거리를 보존하는 사상이라는 것은 실제로는 곡선의 길이를 보존하는 사상이란 뜻이 되고, 곡선의 길이가 각 점에서의 속도벡터의 크기의 적분이므로 결국은 각 점에서의 속도벡터를 계산한 결과를 보존하는 것이 거리를 보존하는 사상이 될 것이라는 것도 명백하다.

따라서 우리가 찾는 것은 쌍곡평면의 변환 가운데 쌍곡평면의 각 점의 벡터의 크기를 보존하는 변환을 말한다. 우리가 $\mathbb{H}^2_D$를 공부할 때, 각 점에서의 속도 벡터가 같아지도록 정할 때에 사용한 사상은 D^2를 보존하는 선형분수변환들이었다. 따라서 당연히 D^2를 보존하는 선형분수변환들은 $\mathbb{H}^2_D$의 벡터의 크기를 보존하고 따라서 두 점 사이의 거리를 보존한다. 자 이것들 말고도 두 점 사이의 거리를 보존하는 사상이 더 있는가? 즉 벡터의 크기를 보존하는 사상이 더 있는가?

이 질문을 조금 간단히 바꾸는 방법이 있다. $\mathbb{H}^2_D$를 자기 자신으로 보내는 1대1 대응 T가 모든 벡터의 크기를 보존한다고 하자. 우리는 선형분수변환을 가지고 있으므로 $T0$를 0보내는 선형분수변환

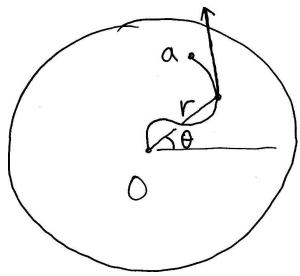
$$g(z) = \frac{z - T0}{-\overline{(T0)}z + 1}$$

을 T와 합성한 사상 $g \circ T$는 원점 0을 고정시키며 벡터의 크기와 두 점 사이의 거리를 보존하는 사상이다. 따라서 이런 사상이 선형분수변환 밖에 없다면 이러한 T는 선형분수변환이 되지 않으면 안 된다. 따라서 $T0 = 0$라고 가정해도 된다.

$\mathbb{H}^2_D$는 원점에 대한 회전을 하여도 벡터의 크기는 변하지 않으므로 원점에서 a까지의 거리 (곡선의 길이의 최소값)는 $|a|$에 의해서 결정된다. 이 거리를 계산하여 보자.

정리 3.4.1. $\mathbb{H}^2_D$의 원점 0과 점 a를 연결하는 가장 짧은 곡선은 직선뿐이다.

(증명) 원점에서 시작하여 점 a에서 끝나는 미분가능한 곡선을 $\mathbb{C}$의 극좌표로



써서 $(r(t), \theta(t))_P (a \leq t \leq b)$로 나타내자. 이 곡선의 길이를 계산하기 위하여 이 점의 (x, y)좌표를 계산하여 보면

$$(r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t))$$

이다.

이 곡선의 속도벡터는

$$(r'(t)\cos\theta(t) - r(t)\theta'(t)\sin\theta(t), r'(t)\sin\theta(t) + r(t)\theta'(t)\cos\theta(t))$$

이므로 이 벡터의 크기의 제곱은, 간편히 하기 위하여 변수 t를 생략하고 쓰면

$$\frac{4}{(1-r^2)^2}\left((r')^2 + r^2(\theta')^2\right)$$

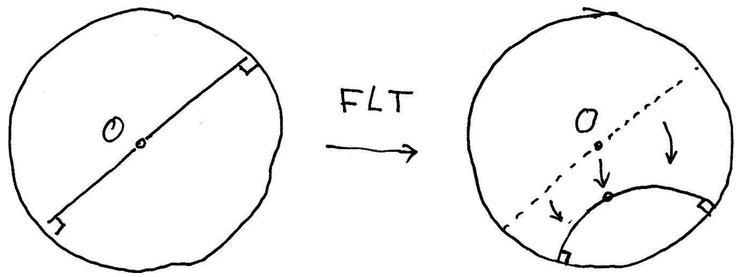
이 된다. 따라서 이 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{2}{(1-r^2)}\sqrt{(r')^2 + r^2(\theta')^2}\,dt &\geq \int_a^b \frac{2}{(1-r^2)}\sqrt{(r')^2}\,dt \\ &\geq \int_a^b \frac{2r'}{(1-r^2)}\,dt = \int_0^{|a|} \frac{2}{(1-r^2)}\,dr = \ln\frac{1+|a|}{1-|a|}\end{aligned}$$

가 되어 원점과 a를 잇는 직선의 길이보다 항상 길거나 같다. 따라서 직선이 가장 짧은 곡선이다. ■

문제 위의 증명의 부등식의 계산을 사용하여 원점을 지나는 가장 짧은 곡선은 직선뿐임을 보여라.

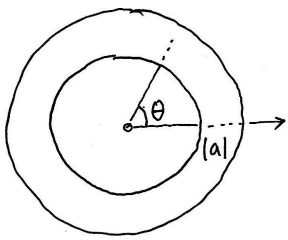
따름정리 3.4.2. $\mathbb{H}^2_D$ 위의 임의의 두 점을 잇는 가장 짧은 곡선은 이 두 점을 지나며 단위원과 수직으로 만나는 (유일한)원의 호이다.



(증명) 이 두 점 가운데 한 점을 원점으로 보내는 선형분수변환을 적용하여도 이 두 점 사이의 거리는 변하지 않는다. 원점과 다른 한 점을 잇는 곡선 가운데 가장 짧은 곡선은 이 두 점을 잇는 직선이므로 주어진 두 점을 잇는 가장 짧은 곡선은 이 직선을 위의 선형분수변환의 역변환으로 보낸 곡선이 된다. (이것도 FLT이다.) 이 직선은 단위원과 수직으로 만난다. 따라서 이의 상은 원이면서 단위원과 수직으로 만나야 한다. ■

두 점을 잇는 가장 짧은 곡선을 직선(geodesic)이라고 부른다. $\mathbb{H}^2_D$의 직선은 경계인 단위원과 수직으로 만나는 모든 직선과 원이다.

도움정리 3.4.3. D^2의 반지름 $0 < |a| < 1$인 원에서 중심각이 θ_0인 호의 $\mathbb{H}^2_D$에서의 길이는 $2|a|\theta_0/(1-|a|^2)$이다.



(증명) 우선 실수축에서 시작하여 양의 방향으로 θ만큼 움직인 호의 길이를 계산하자. 이를 중심각을 t로 하여 parametrize하면 $(|a|\cos t, |a|\sin t)$이므로 그 속도벡터 $(-|a|\sin t, |a|\cos t)$의 크기 $|a|$를 적분하면

$$\int_0^\theta \frac{2|a|}{1-|a|^2}\,dt = \frac{2|a|\theta}{1-|a|^2}$$

이다. 따라서 호의 길이는 중심각의 크기에 비례함을 알 수 있다. 따라서 반지름이 같은 어떤 호의 크기도 도움정리의 식으로 나타내어진다. ■

문제 원점에서 $\mathbb{H}_D^2$의 거리로 r만큼 떨어진 점을 지나는 중심각 θ인 원호의 $\mathbb{H}_D^2$에서의 길이를 구하여라.

정리 3.4.4. $\mathbb{H}_D^2$를 자기 자신으로 보내는 *1*대*1* 대응 T가 $T0 = 0$이며 $\mathbb{H}_D^2$의 모든 두 점 사이의 거리를 보존하면 $Tz = \lambda z$이고 $|\lambda| = 1$인 λ가 존재한다.

(증명) 이 정리의 증명은 위의 정리와 도움정리로부터 당연하다. 각 점 z의 T에 의한 상은 원점을 중심으로 하며 z를 지나는 원 위에 놓인다. 이러한 각각의 반지름을 가지는 동심원은 각각 일정한 각만큼 회전할 수 밖에 없다. 이제 0와 $\mathbb{H}_D^2$의 각 점을 연결하는 가장 짧은 곡선은 각각 직선뿐이므로 선분 $[0, a](a > 0)$ 위의 점은 회전 속도가 모두 같아야 한다. 따라서 모든 동심원은 T에 의하여 같은 각만큼 회전하여야 한다. 이 각을 θ라 하면 $\lambda = \exp(i\theta)$가 된다. ■

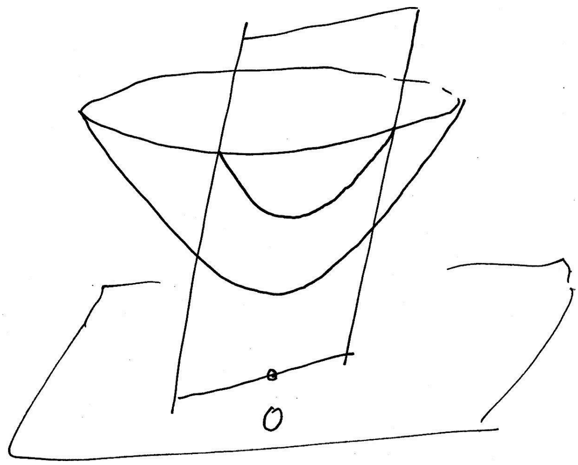
문제 위의 정리의 증명에서 선분 $[0, a](a > 0)$ 위의 점은 회전 속도가 모두 같아야 함을 설명하여라.

따름정리 3.4.5. $\mathbb{H}_D^2$를 자기 자신으로 보내는 *1*대*1* 대응 T가 $\mathbb{H}_D^2$의 임의의 두 점 사이의 거리를 보존한다고 하자. 그러면 T는 다음과 같은 꼴이다:

$$Tz = \lambda \frac{z + a}{\bar{a}z + 1}, \quad \textit{for some } |a| < 1, |\lambda| = 1.$$

임의의 두 점 사이의 거리를 보존하는 사상은 등거리사상(isometry)이라고 부른다. $\mathbb{H}_D^2$의 등거리사상 전체는 군을 이룬다. 이 군을 간단히 Isom$(\mathbb{H}^2)$로 나타낸다.

정리 3.4.6. $\mathbb{L}^3$의 쌍곡면 $\mathbb{H}_L^2$ 위에서 직선*(geodesic)*은 $\mathbb{L}^3$의 원점을 지나는 평면과 $\mathbb{H}_L^2$와의 교선이다. *(*이 교선을 쌍곡면의 대원이라고 부르자.*)*



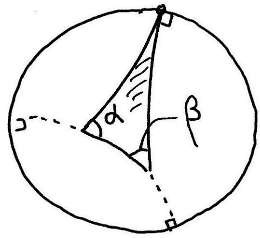
(증명) 쌍곡면의 꼭지점 $(0,0,1)$을 지나는 직선은, h축을 품는 (xy평면과 수직인) 평면과 쌍곡면의 교선인 쌍곡선이다. 이제 다른 점에서의 직선은 꼭지점에서의 직선을 등거리사상인 $\mathbb{L}^3$의 로렌츠변환(직교사상)의 상이다. 로렌츠변환은 $\mathbb{L}^3$의 선형사상이므로 평면을 평면으로 보낸다. 따라서 다른 점에서의 직선도 원점을 지나는 평면과 쌍곡면의 교선인 쌍곡선이 된다. ■

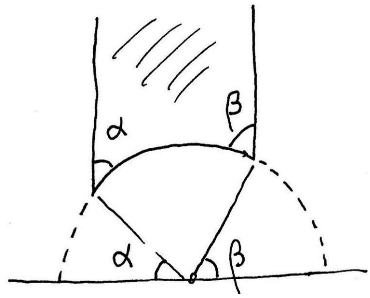
문제 유클리드 평면과 구면에서 사용했던 방법과 유사하게 계산을 사용하여 쌍곡평면에서의 직선이 쌍곡면 모양의 대원임을 보일 수 있는가?

쌍곡삼각형의 넓이

쌍곡평면의 삼각형은 쌍곡평면의 세 점과 이 세 점을 잇는 세 직선(geodesic)으로 이루어진 도형이다. 우리는 유클리드 평면에서와 같이 이 세 꼭지점을 써서 삼각형을 나타낸다. 이 삼각형의 넓이를 구하는 공식을 알아보자.

도움정리 3.4.7. 다음 그림과 같은 무한히 큰 영역의 넓이는 $\pi - (\alpha + \beta)$이다. 이러한 영역을 무한삼각형이라 부른다.



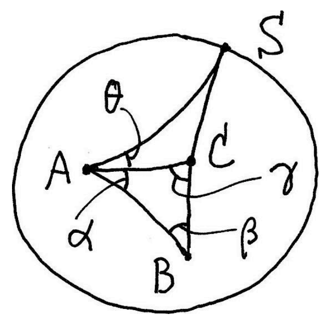


(증명) 이 무한삼각형의 넓이는 상반평면에서 구하면 쉽다. 각 점에서 넓이는 유클리드 식의 넓이의 $1/y^2$ 배로 계산하여야 하므로 위의 오른쪽 그림에서 이 넓이는

$$\int_{-\cos\alpha}^{\cos\beta}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty}\frac{1}{y^2}\,dy\,dx=\int_{-\cos\alpha}^{\cos\beta}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\pi-(\alpha+\beta)$$

가 된다. ■

정리 3.4.8. $\mathbb{H}^2$의 삼각형 ABC의 세 꼭지각의 크기가 α,β,γ일 때 이 삼각형의 넓이는 $\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$이다.



(증명) 위의 그림과 같이 변 BC를 연장하여 무한히 뻗은 직선을 그리고 그 방향의 무한원점 S와 A,B로 만들어진 무한삼각형을 생각한다. $\angle SAC=\theta$라 하면 $\angle ACS=\pi-\gamma$이므로 이 삼각형의 넓이는

$$\big(\pi-\beta-(\alpha+\theta)\big)-\big(\pi-\theta-(\pi-\gamma)\big)=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$$

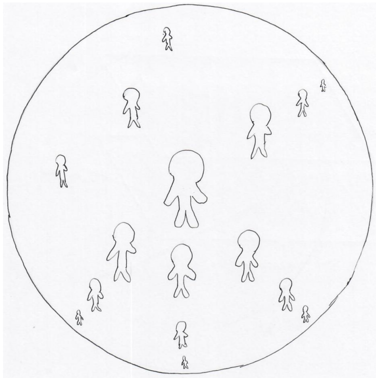
가 된다. ■

문제 구면에서와 같이 이 넓이 공식을 사용하여 구면이나 유클리드 평면은 쌍곡평면과 적절한 1대1 대응으로 곡선의 길이나 두 곡선이 만나서 만드는 각이 서로 일치하도록 할 수 없음을 설명하여라.

포앙카레가 한 쌍곡평면의 설명

Gauss, Bolyai, Lobachevski 등에 의하여 비 유클리드 기하학이 만들어졌지만 사람들은 이러한 기하학 또는 이러한 기하학이 성립하는 공간은 단순히 관념적인 것이며 실제로 존재할 수 있는 공간이라고는 여기지 않았다. 실제로 이러한 점에 대한 생각이 바뀌게 된 것은 Einstein에 의한 상대성 이론이 나오고 물리학의 실험을 통하여 우리가 사는 세상이 유클리드가 생각했던 것과 같이 평평하지 못하다는 사실이 밝혀진 후이다. 그러나 이보다 조금 더 일찍 포앙카레는 비유클리드 기하학의 모형을 만드는 과정에서 다음과 같은 재미있는 생각을 했다.

둥근 원으로 된 방을 만들고 방에 난방/냉방 장치를 하여 각 지점에서의 온도를 적절히 유지할 수 있게 한다. 이러한 방 안에 새로운(!) 종의 사람를 생각한다. 이 사람은 보통 사람과 유사하지만 그 피부 및 구조는 매우 탄력이 좋은 물질로 되어있고 내부는 (이상적인) 기체로 이루어져 있다. 즉, 우리의 몸이 물(액체)로 차 있는 것에 비하여 이 사람들은 공기로 차 있다. 특히 이 사람들의 몸은 주위의 열에 매우 민감하게 반응하여 항상 주변의 온도와 자신의 몸의 내부의 온도를 일치시킨다. (이러한 조건은 이 사람의 움직임이 매우 느리다고 가정하면 된다.)



이제 이러한 사람이 위의 방 안에서 돌아다닐 때 어떠한 일이 일어나는가 알아보기로 한다. 우선 이 사람이 걸어갈 때 주위의 기온이 낮은 데서는 이 사람의 몸의 부피가 줄어들고, 따라서 이 사람의 보폭도 줄어든다. 그러니까 같은 거리를 가려고 해도 이 사람은 더 많은 걸음을 걸어야 한다. 이 뿐만 아니라 이 사람이 보기에는 같은 거리도 추운 데서는 더 멀게 느껴진다. (그럴 수밖에 없다. 맞는가?) 즉 이런 사람이 살며 느끼는 거리는 보통 사람이 보아서 느끼는 거리와는 다른 거리이다.

여기서 의문이 하나 생긴다. 우리 거리가 옳은 것인가? 아니면 그 사람의 거리가 옳은 것인가?

자 우리는 이 방의 온도를 조절하여 이 사람의 세상을 여러 가지로 바꾸어 놓을 수 있다.

이제 온도를 적절히 잘 맞추어 다음과 같이 되도록 한다. 우선 이 방이 단위원이라고 생각한다. 즉, 이 방의 반지름을 단위로 잡는다. 이 방의 각 점의 위치를 복소수를 써서 나타내기로 하면 이 방은 $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 로 나타낼 수 있다. 이제 각 점에서의 온도를 바꾸어서 점 z 에서 이 사람의 팔 다리의 길이가 이 사람이 원점에 있을 때의 길이의 $(1 - |z|^2)$ 배가 되도록 맞춘다. 이제 이 방은 이 사람에게는 어떤 곳이라고 느껴질까?

이 사람이 점 z 에 서 있을 때 이 부근은 이 사람에게는 각 방향으로 원래 크기의 $1/(1 - |z|^2)$ 배 만큼 크게 느껴진다. 따라서, 이 사람이 방의 경계$(= \{z : |z| = 1\})$

에 가까이 가면 갈 수록 이 사람은 작아지고 상대적으로 이 방은 커진다. 실제로 이 사람은 아무리 열심히 걸어도 이 방의 끝(경계)까지 갈 수 없게 된다. (매우 효과적으로 이 사람을 가둘 수 있다.)

이제 이 사람이 한 점 z 에서 다른 한 점 w 까지 가려고 한다. 어떤 길을 따라 가는 것이 가장 빠른 길인가라는 문제를 생각하여 보자.

직관적으로 생각하여 볼 때, 두 점을 잇는 직선거리는 우리에게는 가장 빠른 길이지만 이 사람에게는 그렇지 못하다. 이 사람에게는 두 점을 잇는 선분보다 조금 더 중심점에 가깝게 돌아가는 것이 낫다. 중심점에 가까워지면 가까울수록 이 사람이 커지므로 거리는 조금 돌아가도 걷는 걸음 수가 줄어들어 더 가깝게 느껴지기 때문이다. 위에 주어진 배율(?)은 포앙카레가 찾아낸 매우 특수한 함수이다. 이렇게 배율이 변하면 이 사람이 가장 빨리 갈 수 있는 길은 모두 원호 모양이 된다. 특히 이 원호들은 방의 경계와 항상 수직으로 만나야 한다. (원점을 지나야 하는 경우는 직선이 된다.)

자 쌍곡평면이 실제로 손으로 만져볼 수 있듯이 느껴지는가?

3.5 쌍곡기하의 삼각법

이 절의 목표

1. 쌍곡 평면에서의 계산법을 공부한다. 특히 벡터의 내적과 쌍곡기하의 각의 성질 등을 공부한다.
2. 쌍곡기하에서의 삼각형의 코사인 법칙, 사인 법칙등에 대하여 알아본다.

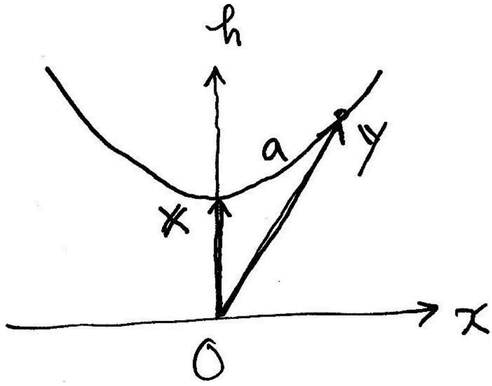
들어가기

유클리드 평면이나 구면에서와 마찬가지로 쌍곡평면의 기하에서도 삼각법을 사용할 수 있다. 신기한 것은 쌍곡평면의 계산의 대부분은 구면의 계산과 매우 닮았다는 것이다. 몇 군에 부호가 달라지는 것과 sin, cos 이 sinh, cosh 등으로 바뀌는 것만 빼고 나면 신기하게 모두 똑같다. 여기에서 어떤 이유가 있는 것인가?

기하학을 공부하는 관점은 여러 가지가 있지만 $x^2+y^2+h^2 = 1$과 $x^2+y^2-h^2 = 1$을 비교하여 보면 앞의 식에서 h를 ih로 바꾸면 뒤의 식이 된다는 것을 알아볼 수 있다. 가만히 보면 삼각함수와 쌍곡선함수 사이에도 이와 같은 관계가 있다. 그러니까 기하는 많이 달라보여도 실제로 우리 계산은 거의 같은 계산이 될 수 밖에 없는지 모른다.

3.5.1 $\mathbb{L}^3$ 의 기하

쌍곡평면에서의 계산을 쉽게 하기 위하여 $\mathbb{L}^3$ 의 기하를 알아보자. 우선 $\mathbb{H}^2_L \subset \mathbb{L}^3$ 위의 두 점을 잡아 **x**, **y**라 하자. $\mathbb{L}^3$ 에서 이 두 벡터의 내적은 어떠한 값을 나타내는가? 일반적인 계산은 복잡하므로 $\mathbb{L}^3$ 에서 노옴과 내적을 모두 보존하는 로렌츠 변환으로 이 두 점을 옮겨보자. 우선 **x**를 h축으로 옮길 수 있다. 이는 $\mathbb{H}^2_D$ 에서 한 점을 원점으로 옮기는 선형분수변환을 입체사영으로 $\mathbb{H}^2_L$ 로 옮겨서 얻어진 로렌츠 변환을 쓰면 된다. 따라서 $\mathbf{x} = (0, 0, 1)$ 이라고 가정하여도 된다.



이제 $\mathbb{L}^3$에서 h축에 대한 회전을 사용하여 **y**는 xh평면 위에 놓이도록 할 수 있다. 따라서 $\mathbf{y} = (\sinh a, 0, \cosh a)$ $(a > 0)$라고 할 수 있다. 이제 이 두 벡터의 내적은

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L = -\cosh a$$

이다. 이 때 a는 무엇을 나타내는가? 쌍곡평면 위에서 **x**와 **y**를 잇는 직선(geodesic)의 길이를 계산해 보자. 이 직선은 $(\sinh t, 0, \cosh t)$ $(0 \le t \le a)$로 나타낼 수 있다. 속도벡터 $(\cosh t, 0, \sinh t)$의 크기를 적분하면

$$\int_0^a (\cosh^2 t - \sinh^2 t)^{1/2}\, dt = a$$

이므로 쌍곡평면 위에서 두 점 사이의 거리이다. 이것이 원호 **xy**의 길이이고 따라서 쌍곡중심각이기도 하다. 즉,

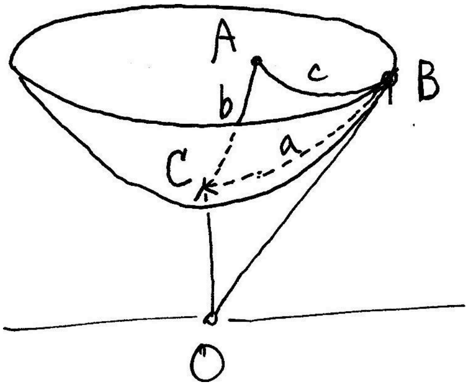
정리 3.5.1. $\mathbb{H}^2_L$ 위의 두 벡터에 대하여 $\mathbb{L}^3$의 내적은 다음을 만족시킨다.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L = -\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cosh a$$

여기서 a는 두 벡터 **x**, **y** 사이의 쌍곡각*(hyperbolic angle)*이다.

3.5.2 Cosine 법칙

이제 쌍곡면 모형 위에서 쌍곡삼각형 ABC를 생각하여 보자. 이 삼각형을 isometry로 옮겨서 점 C는 $(0,0,1)$에 오도록 하고 다시 h축에 대하여 회전하여 점 B는 xh평면 위에 놓이도록 한다.



그러면 변 AB의 길이가 a이므로 점 B의 좌표는 $(\sinh a, 0, \cosh a)$라고 잡을 수 있다. 이제 점 A가 점 C에서 변의 길이 b만큼 떨어져 있고 xh 평면 위의 점 $(\sinh b, 0, \cosh b)$로부터 h축에 대하여 각 C만큼 회전한 점이므로 그 좌표는 $A(\sinh b \cos C, \sinh b \sin C, \cosh b)$가 된다. 이제 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$의 내적을 계산하여 보면

$$\cosh c = -\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle_L = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos C$$

이다.

정리 3.5.2 (변에 대한 쌍곡 Cosine 법칙)**.** 쌍곡삼각형 ABC에 대하여 다음이 성립한다:[4)]

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos C.$$

따름정리 3.5.3 (Pythagoras의 정리)**.** $\angle C = \pi/2$인 직각삼각형 ABC에 대하여 다음이 성립한다:

$$\cosh c = \cosh a \cosh b.$$

4) 구면 삼각형에서와 같이 쌍곡삼각형에도 쌍대이론이 있다. 이를 사용하면 각에 대한 다음 쌍곡 Cosine법칙을 증명할 수 있다. 이 정리의 삼각형에 대하여 다음이 성립한다:

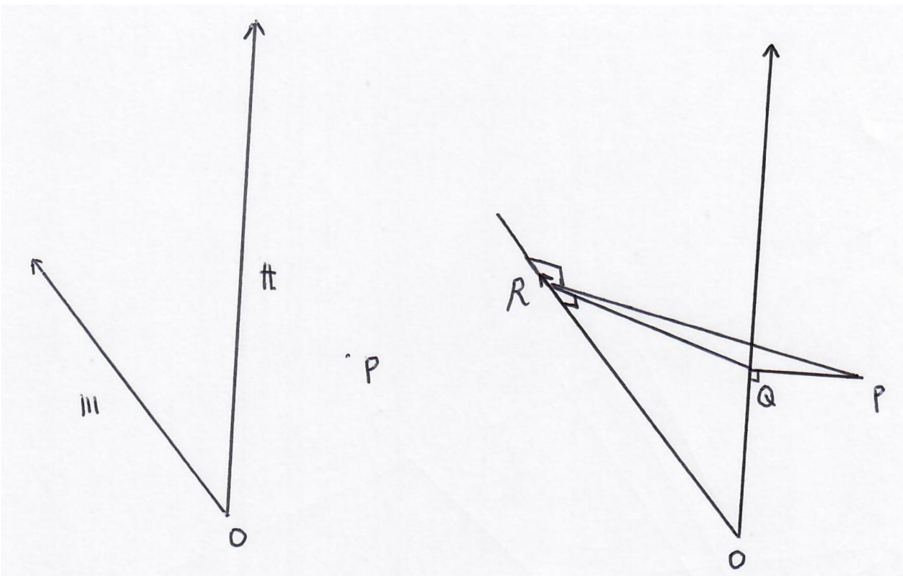
$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cosh c$$

문제 쌍곡삼각형 ABC 에 대하여 다음 Sine법칙이 성립한다. 구면삼각형에 대한 기하학적 증명을 참조하여 이를 증명할 방법이 있는지 생각하여 보아라.

$$\frac{\sinh a}{\sin A} = \frac{\sinh b}{\sin B} = \frac{\sinh c}{\sin C}.$$

쌍곡직각삼각형과 삼수선

3차원 민코브스키 공간의 다음 그림에서 OP 와 점 O 에서 시작하는 두 벡터 $\mathbf{t}, \mathbf{u}$ 는 모두 timelike 벡터이다. 점 P 는 두 벡터 $\mathbf{t}, \mathbf{u}$ 가 결정하는 평면에 있지 않다.



〈그림 3.1〉 삼수선

점 P 에서 평면 π 에 내린 수선의 발을 Q, 점 Q 에서 직선 m 에 내린 수선의 발을 R 이라고 하면, 직선 PR 은 직선 m 과 수직하다. (삼수선 정리가 주장하는 것이다). 이제, 평면 π 밖의 점 P 에 대하여, 직선 l 과 점 P 가 결정하는 평면은 평면 π 와 수직하다고 가정하자. 그러면 점 Q 는 직선 l 위에 있게 된다.

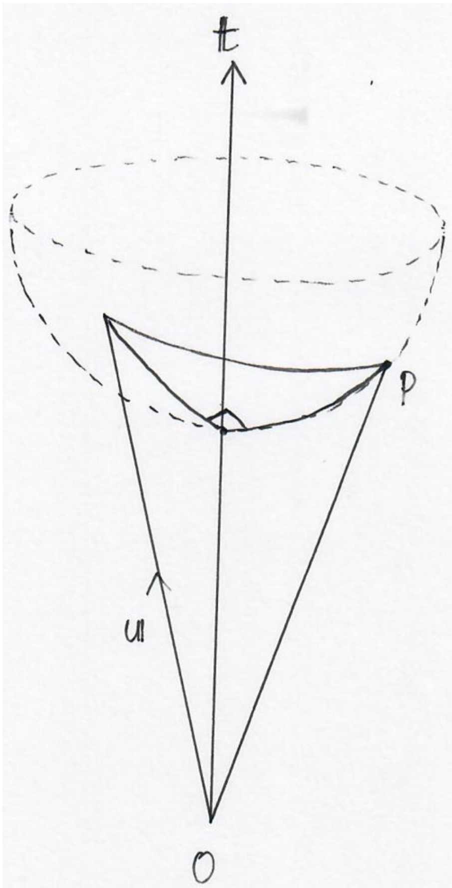
이제, $|OP| = 1, \angle QOP = \alpha, \angle QOR = \beta, \angle POR = \gamma$ 라고 하면, $|OQ| = \cosh\alpha$ 이다.

직각삼각형 OQP 에서, $|OR| = \cosh\alpha\cosh\beta$ 이고, 직각삼각형 ORP 에서, $|OR| = \cosh\gamma$ 이므로,

$$\cosh\alpha\cosh\beta = \cosh\gamma$$

가 성립한다.

다음 그림에서 알 수 있듯이, 이것이 쌍곡직각삼각형에 대한 피타고라스 정리이다.



〈그림 3.2〉 쌍곡직각삼각형

제 4 장

사영 평면의 기하

1. 사영 평면과 동차좌표
2. 사영기하의 유명한 정리
3. Cross Ratio
4. 사영기하의 쌍대성

4.1 사영 평면과 동차좌표

이 절의 목표

1. 투영과 무한원점을 공부하고 사영평면의 개념을 알아본다.
2. 사영평면의 위상적 모양을 알아보고 이 위에 동차좌표를 정의한다.
3. 동차좌표를 사용하여 계산하는 방법을 알아본다.
4. 동차방정식의 기하를 알아본다.

들어가기

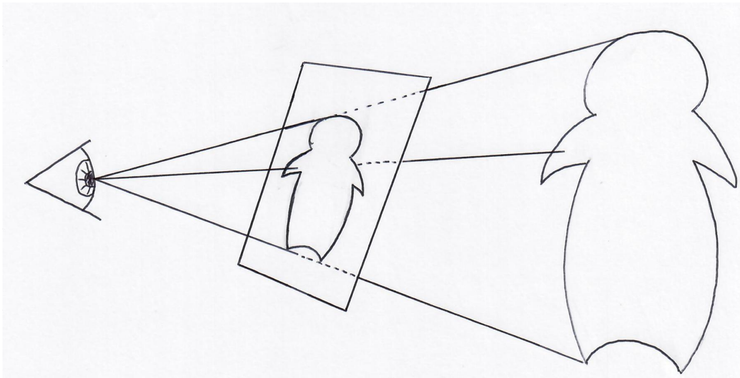
추상 기하학의 본질을 가장 잘 보여주는 기하학의 이론은 사영기하학이라고 할 수 있다. Klein의 입장에서 설명하면 사영기하학이란 사영변환에 대하여 변하지 않는 성질을 연구하는 기하학이라고 할 수 있다. 따라서 사영변환이 무엇인가가 중요할 것이다.

사영 변환이 가장 먼저 활용된 것은 미술에서이다. 중세를 지나며 사실적인 표현을 위하여 미술가들은 투영에 대하여 연구하기 시작하였고, 지도를 만드는 사람들은 둥근 지구를 기하학적으로 정확하기 나타내기 위하여 다른 여러 가지 투영법을 연구하였다. 그러나 17세기에 들어서며 데자르그(Girard Desargues)가 이러한 성질들을 기하학적으로 연구하기 시작하였고 유명한 Desargues의 정리를 발견하였다. 이는 Pascal에게 자극을 주어 Pascal의 정리를 이끌어내었으며 18~19세기를 지나며 쌍곡기하학과 함께 비유클리드 기하학으로서 확실하게 기하학의 한 자리를 차지하게 되었다.

4.1.1 투영과 사영변환

가장 간단한 사영변환에는 우리가 눈으로 물체를 볼 때 물체의 상을 사진이나 그림 또는 우리의 망막에 옮겨놓는 것이 있다. 이러한 변환의 특징은 어떠한 한 점

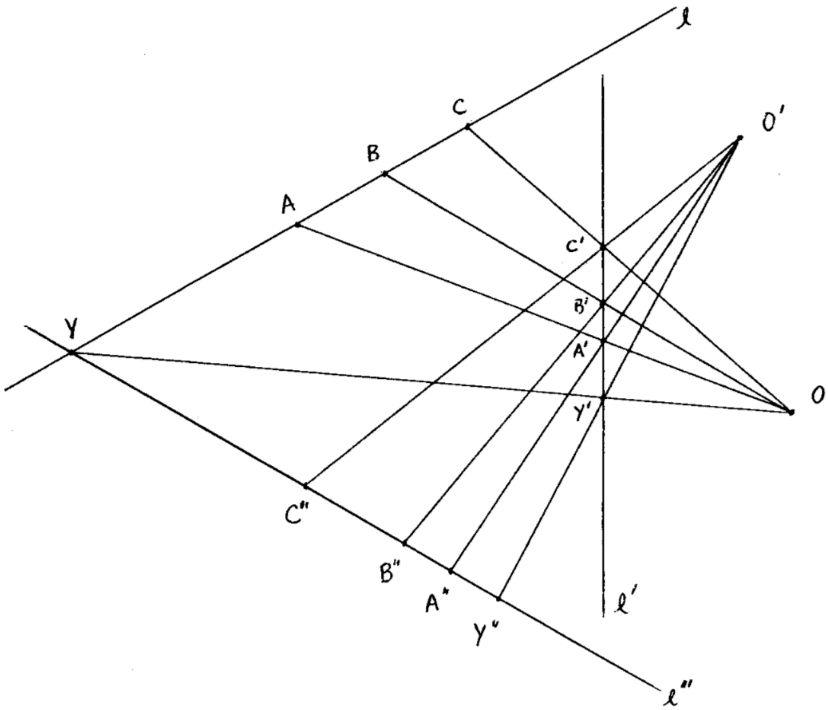
(예를 들면 눈동자의 중심점)이 있어서, 이 점을 지나는 빛의 길을 따라서 그림을 옮겨놓는다는 것이다.



이러한 변환을 특별히 기준이 되는 점(중심점)에 대한 투영 또는 배경적 변환(perspectivity)라고 한다. 일반적으로 사영변환이란 여러 점을 기준으로 한 각각의 투영을 여러 번 거듭하여 변환한 것을 말한다. 서로 다른 두 점을 기준으로 하여 투영을 거듭하면 그 결과는 일반적으로 투영을 하여 만든 변환이 되지 않는다. 즉, 일반 사영변환은 투영보다는 복잡한 변환들이다.

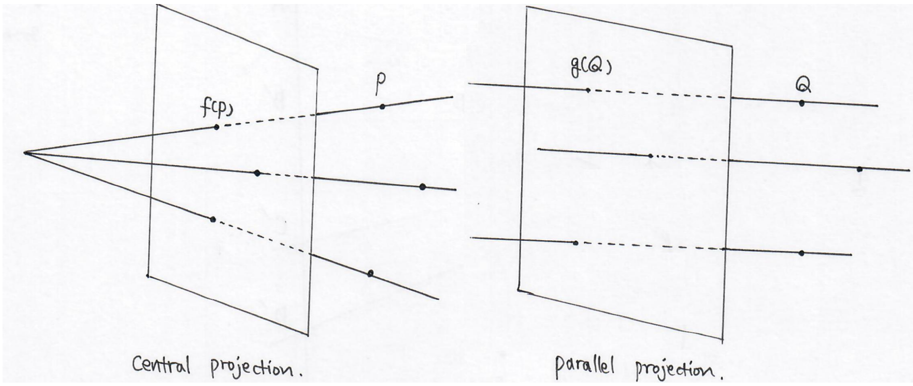
문제

1. 다음 그림에서 점 O와 점 O'에서 차례대로 투영하면 직선 l 위의 점들이 직선 l'' 위의 점으로 대응된다. 이 두 투영의 합성사상은 한번의 투영을 써서 대응시킬 수 없음을 설명하여라. (Hint: 이 합성사상이 투영이라면 점 Y는 어디로 대응되는가?)



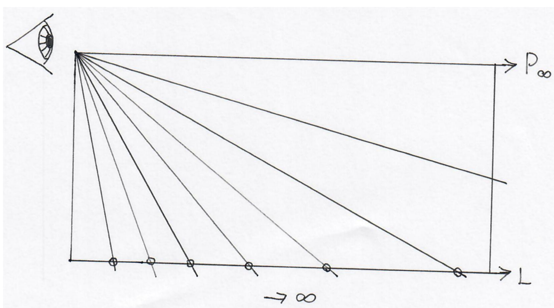
2. 사영변환들이 합성에 대하여 닫혀 있음을 확인하여라.

이러한 투영의 중심점을 멀리 멀리 옮겨서 무한히 멀리 하게 되면 그를 중심으로 한 투영도 극한적인 형태를 갖게 된다. 이렇게 무한히 먼 점(이런 점이 있는가?)에서 평행한 방향으로 투영하는 방법을 평행투영(parallel projection)라고 한다. 이에 반하여 중심점이 있을 때는 이를 중심투영(central projection)이라고 한다.

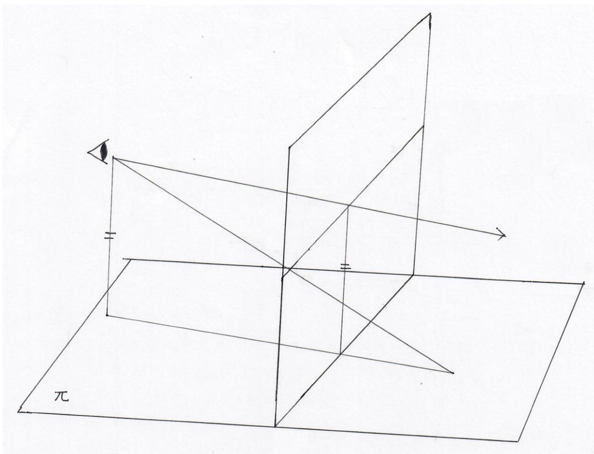


4.1.2 사영 평면

이런 투영법에서 재미있는 것은 한 직선(또는 평면)을 다른 직선(또는 평면)으로 투영할 때, 대부분의 점들이 1대 1로 대응하지만, 가끔은 한 직선 위의 점이 다른 직선에는 대응할 곳이 없는 경우가 있다는 것이다. (아래 그림에서와 같이 눈에 보이는 땅 L의 풍경을 수직인 캔버스에 옮겨 그릴 때 땅의 무한히 먼 지점(지평선 위의 점)은 실제로 존재하지 않지만 캔버스에는 지평선으로 나타나게 된다.) 이러한 경우에 실제로 존재하지 않는 점도 존재하는 점이라고 생각하면 편할 때가 많다. 이렇게 하여 만들어진 가상적인 점을 무한원점(無限遠點; point at infinity) 이라고 부른다.



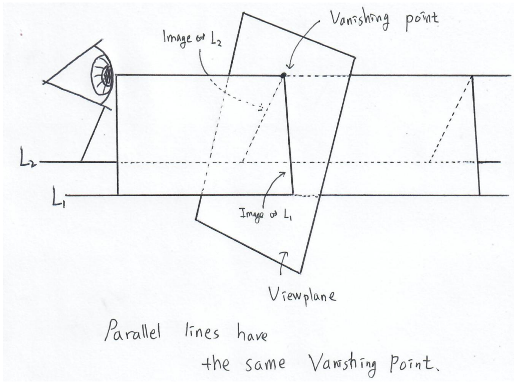
이와 같이 공간에서 각 방향으로 생각할 수 있는 무한원점을 모두 포함시켜 만들어진 특별한 공간을 일반적으로 사영공간이라고 부른다. 여기서는 간단히 사영평면을 생각하여 보자. 우리는 평면 Π를 생각한다. 아래 그림에서 수직평면인 캔버스에 그려지는 지평선 위의 점들은 평면 Π 위에는 존재하지 않는다. 이러한 점을 모두 평면 Π에 첨가하되 한 방향을 잡으면 그 방향이나 그 반대 방향으로 양쪽의 지평선 위의 점을 같은 점이라고 생각하기로 한다.[1)]



이러한 생각은 우리가 캔버스 위에 그림을 그릴 때 우리 눈이 앞쪽만 바라보는 것이 아니라 뒤쪽도 동시에 바라보며 보이는 모두를 캔버스에 그리고 있다고 상상하는 것과 같다. 그러면 앞쪽으로 보이는 것과 정 반대 방향으로 뒤쪽에 보이는 것은 모두 캔버스의 같은 지점에 그려야 될 것이다.

특히 두 개의 서로 다른 점에 서서 바라볼 때 같은 방향으로 바라보게 되면 두 개의 평행한 직선 방향을 바라보는 것이 된다.

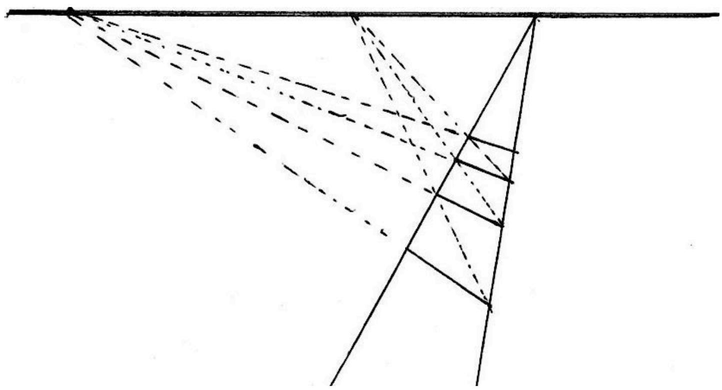
1) 무한히 먼 점을 바라보는 방향 하나에 대하여 양쪽으로 두 개의 무한원점을 집어넣을 수도 있다. 그러나 이렇게 만들면 사영평면이라고는 부르지 않는다.



이 때 이 두 직선은 캔버스 위에서는 지평선 위의 같은 점으로 다가가게 되며 이 점을 이 두 직선의 소실점(vanishing point)라고 부른다. 즉 평면의 모든 점에서 바라보는 모든 무한원점을 그려볼 수 있다. 이렇게 하면 평면 Π 위의 점들에 더하여 사방으로 바라보이는 지평선 위의 무한히 많은 개수의 무한원점을 덧붙이게 되고, 이렇게 만들어진 점들의 집합을 사영평면(projective plane)이라고 부른다. 사영평면은 기호로 $\mathbb{P}^2$ 라고 나타낸다.

이와 마찬가지 방법으로 직선에 필요한 무한원점 한 개를 추가하여 공간을 만들면 $\mathbb{S}^1$ 과 같은 위상의 사영직선 $\mathbb{P}^1$ 이 생긴다. 또 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$ 에 모든 방향으로의 무한원점을 추가하여 사영공간을 만들면 3차원 사영공간 $\mathbb{P}^3$ 를 만들 수 있다.

문제 다음 기차 트랙의 그림을 보고 이 그림의 기차 받침목이 일정한 간격임을 설명하여라. 이 기차 레일과 받침목이 직사각형을 만드는지 알 수 있는가?

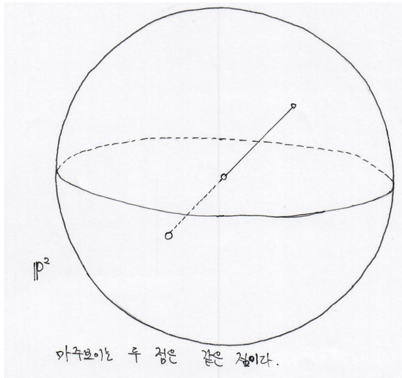


4.1.3 사영평면의 위상기하

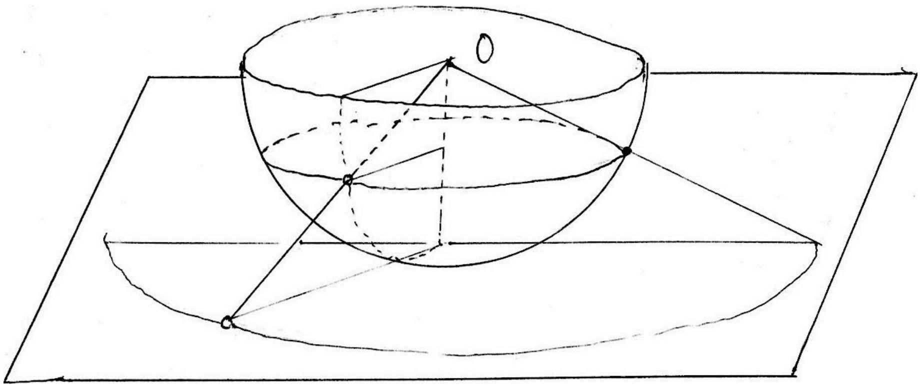
사영평면은 $\mathbb{R}^2$에 무한원점들을 넣어 만든 것이다. 무한원점은 얼마나 많이 있는가? 우리가 평면 위에 서서 사방을 둘러보면 2π만큼 많은 방향이 있다. 이중에 같은 직선 위에서 양쪽으로 바라보는 두 방향은 같은 무한원점이 되기로 되어 있으므로 실제로는 이 반만큼인 π만큼 많이 있다.

캔버스에 그린 그림에 무한원점은 지평선인 직선으로 나타난다. 그렇지만 이 직선은 반 바퀴 돌면 다시 같은 무한원점으로 돌아오므로 양쪽이 서로 붙은 원 모양이라고 할 수 있다. 즉 $\mathbb{P}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{S}^1$이라고 나타낼 수 있다.

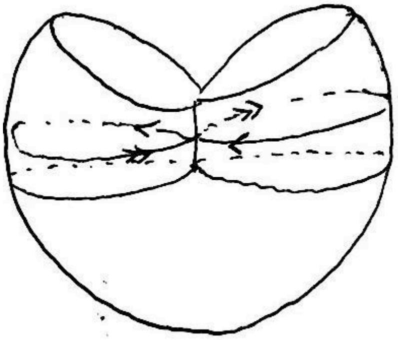
이 공간은 어떻게 생겼는가? 그림으로 나타내기는 쉽지 않다. 방금 우리가 보았듯이 평면을 빙 둘러 모든 방향의 점이 원처럼 보이듯이 우리가 그리는 모든 점은 내가 서 있는 주변의 삼차원 공간의 각 점을 겹쳐 보이는 것은 모두 한 점으로 하여 투영하는 것 같으니까 마치 구면에 투영하는 것과 같다. 내가 바라보는 한 방향을 그 방향에 있는 구면의 점에 그리면 된다. 그러면 원래 평면 Π의 모든 점을 구면에 표시할 수 있고 무한원점도 된다. 다만 아까와 같이 구면에는 내 눈에서 바라보이는 한 직선 방향에 양쪽으로 두 개씩의 점이 있지만 이 두 개의 점은 사영평면에서는 하나의 점으로 표시되어야 하므로 구면 $\mathbb{S}^2$의 모든 점을 가지고 중심에 대하여 마주보이는 각각의 두 개씩의 점을 하나의 점이라고 하면 사영평면을 보는 것과 같다는 것을 알 수 있다.

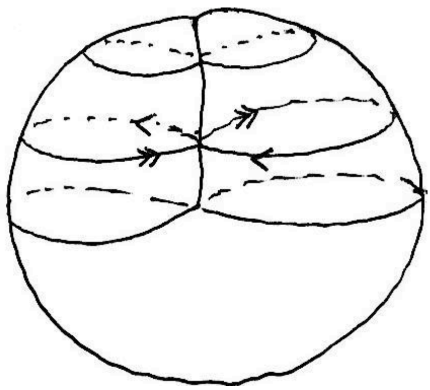


이렇게 보는 사영평면은 구면처럼 생겨서 구부러져 있으니까 평면이라고 부르는데 조금은 마음이 안가지만 전체를 볼 수 있다는 점에서는 평면에 무한원점을 준 것보다는 훨씬 낫다. 이를 조금 더 잘 볼 수 있도록 이 구면 $\mathbb{S}^2$ 를 적도를 따라서 반으로 잘라서 남반구만 보자.



그러면 남반구에는 사영 평면의 점이 한 개씩만 있으므로 굳이 두 점을 하나라고 생각하느라고 힘들지 않다. 그래도 남는 것은 적도 위의 점인데 적도 위의 점의 원점에 대한 대칭인 점 두 개씩 있으므로 이 점들만은 마주 보이는 점이 같은 점이라고 생각해야 한다. 이렇게 적도 위의 마주보이는 점들을 붙여 놓아 보자.



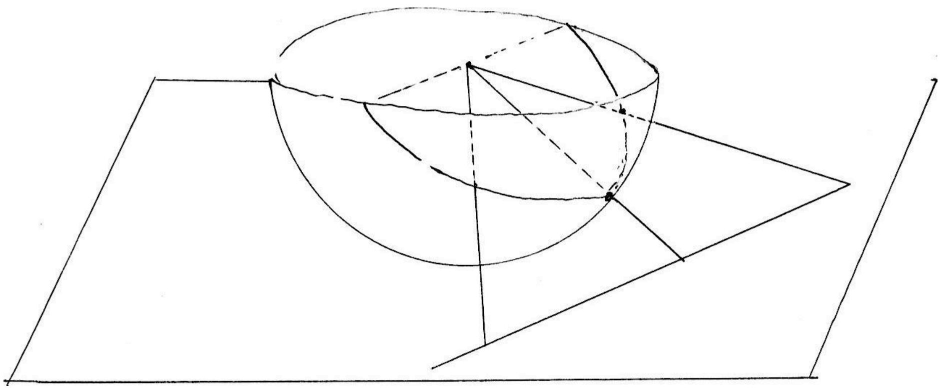


이 그림과 같이 차례로 붙여나가면 이 사영 평면은 오른쪽 끝의 그림과 같이 된다. 단지 위의 마주 붙인 부분에서 같은 높이의 8자 같은 곡선들은 그림의 만나는 것 처럼 보이는 점에서 실제로는 서로 교차하지 않는다. 이 그림은 단지 상상을 돕기 위한 것이지 실제로 3차원 공간 안에 사영평면을 1대1로 그려넣을 수는 없다. (이 말이 정확해지려면 단지 1대1이 아니라 이 그려 넣는 사상이 연속이고 역함수도 연속이 되도록 그려넣을 수는 없다고 해야 하며, 이 말은 어렵게 위상적으로 embedding이 된다는 말과 같다.)

실제로 이렇게 만들면 이 공간의 위상은 복잡해진다. 위상수학을 공부하면 이러한 공간은 단순연결(simply connected)이 아니라는 것을 알 수 있다. 여기서 증명은 하지 못하지만, 사영 평면의 적도의 반으로 만들어진 무한원점들의 닫힌 곡선인 원($\mathbb{S}^1$)은 이 사영 평면 위만을 움직여서는 벗겨낼 수 없다.

문제 무한원점들의 닫힌곡선을 사영 평면에서 연속적으로 움직여 보고 이를 북반구 모형 위에 그림으로 그려 보아라. 이 움직임을 위의 그림 모형에도 그려 보아라.

이러한 사영 평면 모형을 생각하는 것은 기하학적으로 장점이 하나 있다. 다음 그림과 같이 사영 평면의 점을 구면으로 중심에서 투영하면 사영 평면의 모든 직선은 구의 대원으로 대응된다.



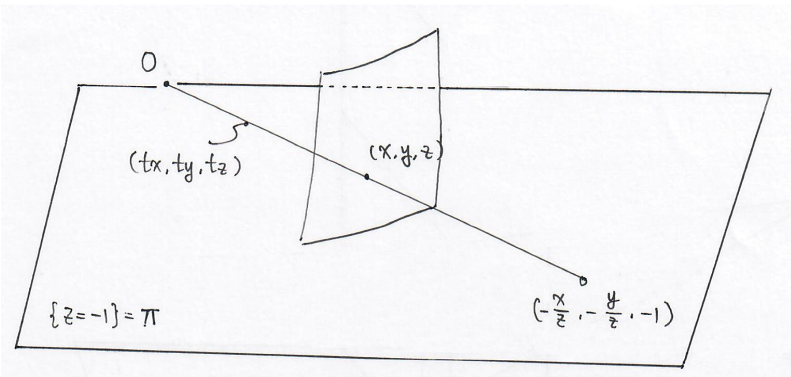
구면에서도 직선은 대원이었지만 이 직선이 한가지 흠이 있다면 두 개의 서로 다른 직선(대원)이 한 점이 아니라 두 점에서 만난다는 것이다. 우리가 보통 생각하는 기하학은 두 직선이 한 점에서 만나는 것이다. 그런데 사영 평면을 생각하면 우리가 모든 직선과 평면에서 마주 보이는 두 점을 항상 한 점으로 생각하므로 두 대원이 만나는 두 점이 사영 평면에서 보면 실은 한 점에서 만나는 것이라고 생각할 수 있다. 즉 구면의 기하를 반으로 나누어 사영 평면의 기하로 옮기면 그 기하는 그대로 있지만 더 기하다운 기하가 된다고 할 수 있다. 단지 위상에서 조금은 양보해야 한다.

4.1.4 동차좌표

Descartes가 고안한 해석기하학은 워낙 편리하기 때문에 사영평면에도 쓸모 있는 좌표를 도입하고 싶은 것은 누구나 마찬가지이다. 그러나 얼핏 좋은 방법이 떠오르지 않는다. 사영평면은 2차원이니까 좌표를 주려면 두 개의 실수를 좌표로 써야 좋겠다는 생각이 우선 들지만, 이렇게 주어서는 편리한 좌표를 만들기 어렵다. 생각의 전환을 가져온 것은 두 개의 실수로 만들어진 좌표를 고집하지 않기로 마음을 바꾸는 것이다. 사영평면을 만들게 된 동기가 3차원 공간에서 사방을 바라보며 있는 것을 모두 그리다가 보니까 점이 더 들어가게 된 것이니까, 3차원 공간에서 쓰는 좌표를 그대로 쓰면 될 것이라는 것이 새로운 발상이다. 이렇게 만들어진 좌

표가 동차좌표(homogeneous coordinate)라고 부르는 것이다. 이를 조금 자세히 알아보는 것은 매우 중요하다.

우리가 대상으로 생각하는 유클리드 평면 Π는 공간에서 xy좌표평면과 평행하며 xy좌표평면보다 거리의 단위 1 만큼 아래쪽에 위치한다고 하자.[2] 즉, 이 평면은 공간에서 방정식 $z = -1$로 나타낼 수 있다. 이 평면에 지평선 위의 무한원점들을 알맞게 집어넣어 만든 공간인 사영평면은 원점을 중심으로 하여 투영하여 나타나는 점을 모두 모은 것이다. 이 때, 공간의 한 점 (x, y, z)는 $z \neq 0$일 때 평면 Π 위의 어떠한 점과 겹쳐 보이며 캔버스 위의 같은 점에 표시될까? 원점을 지나며 또 이 점 (x, y, z)를 지나는 직선의 방정식은 (tx, ty, tz)로 나타내어진다. 이러한 점 가운데 평면 Π 위에 놓이는 점(이 직선이 평면 Π와 만나는 점)은 $tz = -1$인 점이며, 따라서 $t = -1/z$이다. 이제 이를 써서 계산하여 보면 원점에서 바라볼 때 점 (x, y, z)와 겹쳐보이는 Π 위의 점의 좌표는 $(-x/z, -y/z, -1)$이 된다.



즉 좌표평면으로서 Π 위의 점 $(-x/z, -y/z)$와 같은 점이라고 생각되는 것이다. 이제 거꾸로 평면 Π의 점 $(-x/z, -y/z)$를 공간에서 이 점에 겹쳐 보이는 점들의 좌표인 (x, y, z)로 나타내려고 하는 것이다.

2) 실제로는 계산을 편하게 하기 위하여 평면 Π를 $z = 1$로 잡는다. 이제 부터 나오는 계산들에서 $z = 1$ 이면 많은 부호가 불필요함을 확인하여 두어라.

물론 이렇게 나타내기로 하면 한 점을 나타내는 방법은 여러 가지로 많아지게 된다. 즉 평면 Π의 점 (a, b)를 나타내는 방법에는 $(a, b, -1)$도 있고, $(2a, 2b, -2)$도 있으며, $(-3a, -3b, 3)$도 되고, $(-a, -b, 1)$도 된다. 이것은 분명히 평면에서 사용하던 좌표보다 나쁜 점이다. 그러나 이 방법이 좋은 점은 지평선의 점을 향하는 시선(視線) 위에도 공간의 점이 있으므로 무한원점에도 좌표를 줄 수가 있다는 것이다. 예를 들어 원점에서 벡터 $(1, 1)$ 방향으로 무한히 먼 지평선 위의 점은 바라보는 시선의 방정식은 $(t, t, 0)$이다. 따라서 벡터 $(1, 1)$ 방향의 무한원점의 좌표를 그 시선 위의 점의 좌표를 써서 $(t, t, 0)$이라고 나타낼 수 있게 된다.

문제 이와 같이 정의할 때 평면 Π의 무한원점이 될 필요충분조건은 그 점의 동차좌표의 z좌표가 0이 되는 것임을 확인하여라.

4.1.5 동차좌표와 방정식

동차좌표의 利點이 단순히 무한원점을 좌표로 나타낼 수 있는 것뿐이라면 동차좌표는 그리 대단한 것이 못된다. 동차좌표가 좋은 것은 데카르트식의 해석기하학을 할 때, 동차좌표가 생각보다 불편하지 않을 뿐만 아니라, 방정식을 사용하기에도 매우 편리하다는 것이다. 한 가지 문제를 생각하여 보자. 평면 Π 위에 주어진 다음 두 직선의 교점을 구하는 문제를 생각하여 보자.

$$X + Y + 1 = 0, \quad X - Y + 1 = 0$$

평면 Π 위에서 이 방정식이 어떻게 풀리며 어떠한 뜻을 가지고 있는가는 이미 잘 알고 있을 것이다. 중요한 것은 이 문제를 동차좌표를 이용하여 해결하려면 어떤 일이 벌어지는가이다.

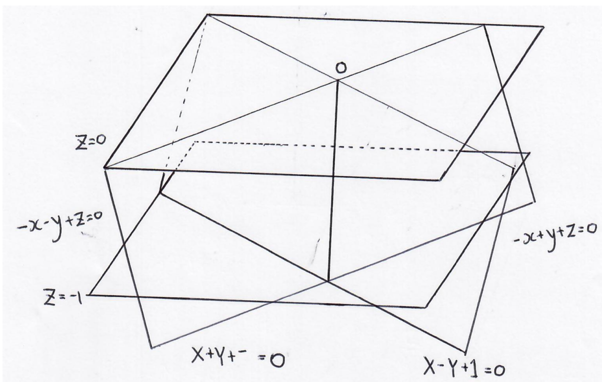
우선 방정식 $X + Y + 1 = 0$을 만족하는 점들을 동차좌표로 나타내면 어떠한 점들이 되는가를 생각하여 보자. 이러한 점 (X, Y)를 동차좌표로 나타낸 것의 하나가 (x, y, z)였다고 하자. 그러면 $X = -x/z$, $Y = -y/z$이다. 따라서 이 점은 다음 방정식을 만족하여야 한다.

$$\left(-\frac{x}{z}\right) + \left(-\frac{y}{z}\right) + 1 = 0.$$

$z \neq 0$일 때 이 방정식을 고치면

$$-x - y + z = 0$$

가 된다. 그러면 평면 Π 위의 직선 $X + Y + 1 = 0$을 원점에서 바라보는 視線들 위에 놓인 점들은 이 방정식 $-x - y + z = 0$을 만족하게 된다. 즉 원점과 직선 X+Y+1=0을 이어 만든 평면의 방정식은 $-x - y + z = 0$이다. 여기서 이 평면 $-x - y + z = 0$ 위의 점들 가운데 무한원점이 아닌 점($z \neq 0$인 점)을 원점에서 투시하면 모두 평면 Π 위에서 직선 $X + Y + 1 = 0$ 위로 가게 된다. 따라서 평면 Π 위의 1차방정식 $X + Y + 1 = 0$의 해 (X, Y)의 동차좌표 (x, y, z)는 다시 1차방정식 $-x - y + z = 0$의 해가 되고 그 역도 성립한다.



마찬가지 방법으로 생각하면, 원점 O에서 직선 $X - Y + 1 = 0$을 바라보는 시선들 위의 점으로 이루어진 평면의 방정식은 $(-x/z) - (-y/z) + 1 = 0$, 즉, $-x + y + z = 0$이 된다. 한편 두 직선

$$X + Y + 1 = 0, \quad X - Y + 1 = 0$$

이 만나는 점을 P라 할 때, 직선 OP는 두 평면

$$-x - y + z = 0, \quad -x + y + z = 0$$

이 만나는 교선을 이룬다.

따라서 두 직선의 교점을 구하는 문제는 동차좌표를 사용하여 계산하면 동차인 (homogeneous) 연립1차방정식을 푸는 문제와 같으며 그렇게 구한 원점을 지나는

교선은 모두 동차좌표로 한 점 P(교점)을 나타내고 있다. 그러므로 평면 Π에서 일차방정식을 다루는 문제는 삼차원 공간에서 동차좌표를 사용하여도 거의 마찬가지임을 알 수 있다.

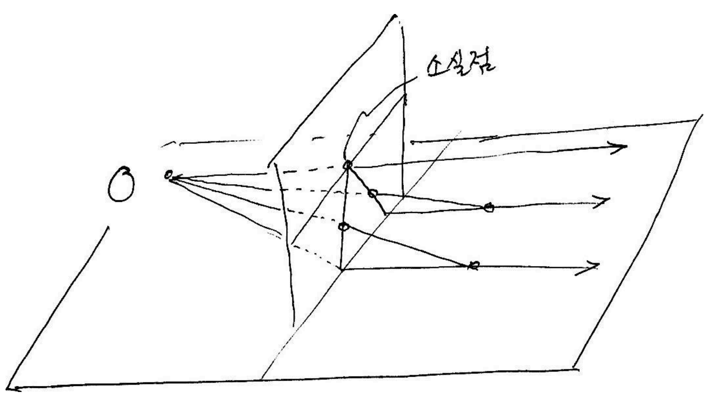
이제 두 직선이 평행하여 교점이 없는 경우를 생각하여 보자. 예를 들면 평면 Π의 두 직선

$$X + Y + 1 = 0, \quad X + Y = 0$$

을 생각하면 이 두 직선은 평행하며 따라서 평면 위에서는 교점이 없다. 이 두 직선을 동차좌표를 써서 나타내면

$$-x - y + z = 0, \quad x + y = 0$$

이 된다. 이를 풀면 $x + y = 0$, $z = 0$을 얻는다. 즉 공간의 직선 $(t, -t, 0)$이 그 교선이다. 이 교선은 평면 Π 위에서 $X + Y = 0$ 방향으로 무한히 먼 무한원점을 나타낸다. 즉 평행한 두 직선은 그 직선 방향의 무한원점에서 만난다고 생각된다. 실제로 이 두 직선을 삼차원 공간의 원점에서 바라보며 캔버스에 나타내면 지평선에서 만나는 두 직선으로 나타난다는 사실은 누구나 잘 알고 있다.(다음 그림 참조) 이 캔버스 위의 두 직선의 교점이 바로 위에서 구한 무한원점임도 쉽게 알 수 있다. 이 점을 보통 소실점(vanishing point)이라고 부른다.



4.1.6 동차좌표와 다항방정식

이제 조금 더 일반적인 경우를 생각하여 보자. 평면 Π 위의 도형이 일반적으로 좌표 X, Y 에 대한 다항식으로 나타난 경우에는 어떻게 될까? 예를 들어 이 도형이 원이라고 생각하고 그 방정식이

$$X^2 + Y^2 - 2X - 2Y + 1 = 0$$

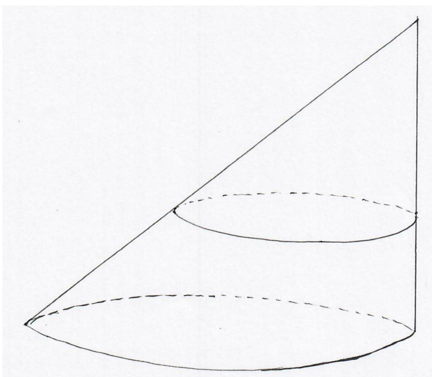
로 주어졌다고 하자. 이제 이 원 위의 점의 동차좌표를 써서 이 방정식의 조건을 나타내면

$$\left(-\frac{x}{z}\right)^2 + \left(-\frac{y}{z}\right)^2 - 2\left(-\frac{x}{z}\right)^2 - 2\left(-\frac{y}{z}\right)^2 + 1 = 0$$

이 된다. 다항방정식으로 만들려면 이 식의 양변에 z^2을 곱하여 주 면 된다. 즉,

$$x^2 + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 = 0$$

이다. 이것이 원점 O에서 평면 Π 위의 원을 바라보는 시선으로 이 루어진 원뿔의 방정식이며, 주어진 원의 동차좌표에 의한 방정식이 기도 하다.



재미있는 것은 이 계산 과정을 보면 어떠한 다항방정식으로 나타나는 도형도 동차좌표를 써서 나타내면 동차인 다항방정식이 된다는 사실이다. 동차인 다항식으로 만들어진 방정식을 동차방정식(homogeneous equation)이라고 부른다.

위의 계산 과정은 다음과 같이 체계적으로 설명할 수 있다. 방정식

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

이 평면 $\{z=-1\}$ 위에 주어져 있다는 것은

$$x^2+y^2-2x-2y+1=0 \quad \text{와} \quad z=1$$

을 만족시키는 점들을 생각하고 있다. 이제 원점에서 바라보아 이 점들과 겹쳐 보이는 점 가운데 하나가 (x,y,z)이면 곡선 위의 점은 적당한 실수 t에 대하여 (tx,ty,tz)라 할 수 있고 이것이 위의 방정식을 만족시키므로

$$(tx)^2+(ty)^2-2tx-2ty+1=0, \quad tz=1$$

라고 쓸 수 있다. 두 번째 조건을 풀면 $z=1/t$이고 이를 방정식에 대입하면 동차방정식을 얻는다. 이러한 조작은 모든 다항방정식에 적용된다.

문제 평면의 모든 다항방정식으로 나타나는 도형의 동차좌표에 의한 방정식은 동차방정식이 됨을 설명하여라.

이러한 사실로부터 알 수 있는 것은 평면 $\Pi=\{z=-1\}$ 위에서 다항방정식을 다루는 것은 공간에서 동차인 다항방정식을 다루는 것과 다름이 없다는 사실이다. 우리는 유클리드 평면에서 다항방정식을 다룰 때는 항상 사영평면에서 동차방정식으로 바꾸어서 다루기로 한다.[3)]

이제 동차방정식과 곡선의 사영에 대하여 알아보자. 평면 $\{z=-1\}$ 위에 놓인 포물선

$$C_1 : x=1+\frac{y^2}{4}$$

를 원점에서 평면 $\{x=1\}$ 위에 사영한 곡선 C_2는 어떤 곡선이 되는가 계산해보자.

앞에서 계산해본 바와 같이 평면 $\{x=1\}$ 위의 점 $(1,y,z)$를 원점에서 평면 $\{z=-1\}$에 사영하면 그 좌표 $(a,b,-1)$은 같은 동차좌표를 가지게 되므로

$$(a,b,-1)=\lambda(1,y,z)=\left(-\frac{1}{z},-\frac{y}{z},-1\right)$$

3) 이러한 생각은 매우 유용하여서 사영기하학이 발전되어 이루어진 대수기하학(algebraic geometry)에서도 계속하여 쓰이고 있다. 이렇게 함으로써 유클리드 평면의 기하학의 이론 가운데 많은 부분이 사영평면에서의 사영기하학의 일부로서 편입되게 된다.
실제로 사영평면을 생각하지 않아도 유클리드 기하학의 내용을 잘 전개할 수 있다. 그러나 이러한 사영기하학을 도입함으로써 유클리드 평면의 기하학 가운데 어떠한 성질이 사영기하학적인 성질이고 어떤 것이 사영기하학은 갖지 못하는 유클리드 기하학 만의 성질인가를 구별하여 이해할 수 있다는 장점이 있다.

가 되어야 한다. (a, b)는 C_1의 방정식을 만족시키므로

$$-\frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{4}\left(-\frac{y}{z}\right)^2$$

이다. 양변에 z^2을 곱하면

$$-z = z^2 + \frac{y^2}{4} \quad \text{즉} \quad y^2 + 4\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

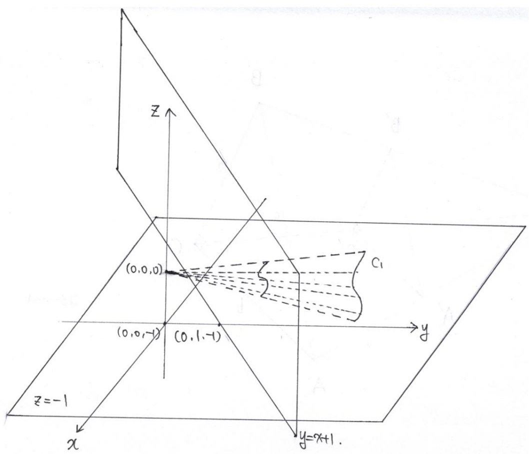
이다. 즉 사영된 곡선은 타원이다.

이제 이 계산을 동차좌표로 알아보자. 곡선 C_1의 방정식을 동차좌표로 고치면

$$-\frac{x}{z} = 1 + \frac{1}{4}\left(-\frac{y}{z}\right)^2 \quad \text{즉} \quad -xz = z^2 + \frac{y^2}{4}$$

이 된다. 여기서 $x = 1$인 평면과의 교선이 C_2이며 이는 이 방정식에 $x = 1$을 대입하면 얻을 수 있다.

문제 위의 계산을 보면 우리가 책상 위에 포물선의 그림을 펼쳐 놓고 앉아서 그것을 바라볼 때 우리가 눈에 맺힌 상은 타원이라고 할 수 있다. 즉 앉아서 책상을 비스듬히 내려다 보면 포물선을 절대로 볼 수 없다는 것을 설명하여라.



문제 곡선 C_1을 원점에서 평면 $y = x$ 위에 사영했을 때 이 곡선의 방정식을, 원점을 이 평면의 원점으로 하고 z축을 그대로 z축으로 사용하며 $z = 0$이고 $y = x$인 직선을 w축이라고 할 때, zw좌표를 써서 나타내어라.

4.2 사영기하의 유명한 정리

이 절의 목표

1. 사영기하의 느낌을 느껴보는 방법으로 데자르그와 파푸스의 정리의 내용을 알아보고 이의 증명법을 알아본다.

2. 데자르그 정리의 한 가지 응용을 공부해 본다.

들어가기

사영기하는 미술이나 지도에서 출발하였어도 단순히 이런 목적으로 끝나는 기하가 아니다. 어떤 면에서 사영기하는 인류에게 처음으로 기하를 제대로 바라보는 눈을 뜨게 해 주었다. 유클리드 기하를 더욱 추상적으로 일반화할 수 있는 길을 열어 주었으며 여기서 유클리드 기하의 특성과 더 일반적인 기하의 특성을 비교 구분할 수 있다는 것을 알려주었다. 사영기하의 발전과 더불어 쌍곡기하도 같이 발전하였으며 존재하지 않는 생각만의 기하라고 생각되던 것들이 실제로 활용되는 기하라는 사실을 인식하게 되면서 이를 이해하려는 많은 노력이 있었다.

사영기하는 거리를 사용하지 않는다. 이러한 기하를 다루기 위하여 몇 가지 방법으로 접근이 가능하다. 특히 유클리드의 방법과 같이 공리적으로 접근하기 위하여 필요한 공리를 찾아보다 보면 이러한 거리를 대신할 성질을 주는 기본적인 기하학적 성질을 찾게 되며 이것들이 사영기하의 공리 자리를 차지하게 된다.

이러한 기본 정리 가운데 데자르그(Desargues)의 정리가 있고 또 파푸스(Pappus)의 정리가 있다. 이 절에서는 이 정리들을 알아본다.

4.2.1 Desargues의 정리

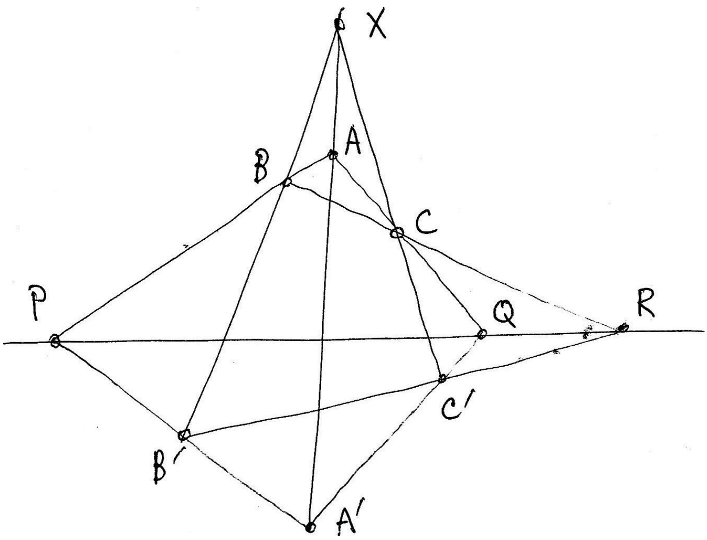
사영공간에서 삼각형 $\triangle ABC$라 하면 세 직선 AB, BC, CA의 합집합을 말한다. 직선들이 공점선을 이룬다(coincident) 함은 이 직선들이 모두 한 점에서 만난다는 뜻이다. 한편 점들이 공선점을 이룬다(collinear) 함은 이 점들이 모두 한 직선

위에 놓인다는 뜻이다. 두 삼각형 $\triangle ABC$ 와 $\triangle A'B'C'$ 이 (이 꼭지점 순서대로) 배경적이다(in perspective) 함은 직선 $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ 이 공점선을 이룬다는 뜻이다.

정리 4.2.1 (데자르그의 정리)**.** 삼각형 $\triangle ABC$ 와 $\triangle A'B'C'$ 이 배경적으로 놓여 있으면 대응되는 변의 교점

$$P = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}, \quad Q = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}, \quad R = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$$

은 공선점을 이룬다.



(증명) 두 삼각형이 배경적으로 놓여 있으므로 그 배경점을

$$X = \overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{BB'} \cap \overleftrightarrow{CC'}$$

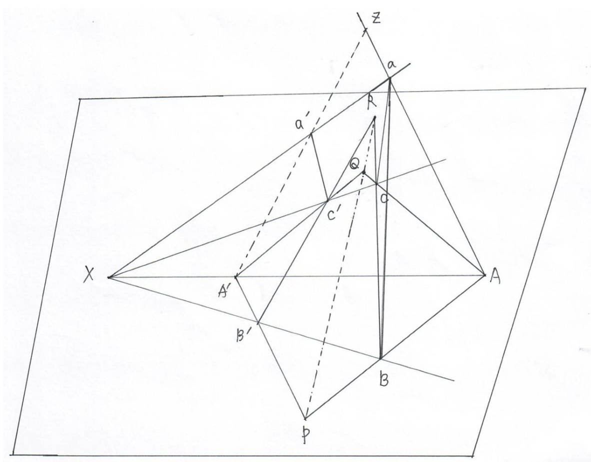
이라 하자.

첫 번째 경우: 삼각형 $\triangle ABC$ 와 $\triangle A'B'C'$ 이 같은 평면 위에 놓이지 않은 경우를 생각하자. 이 때는 증명이 간단하다. 우선 공간에서 점 P, Q, R 이 존재하는가를 확인하자. 예를 들어 점 P 가 존재하는 것, 즉 직선 $\overleftrightarrow{AB}$ 와 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 이 만나는가를 확인

하려면 단순히 이 두 직선이 세 점 A, B, X 가 이루는 평면 $\overline{ABX}$ 위에 놓여있다는 사실만 눈여겨보면 된다. 나머지 두 점도 마찬가지이다. 이제 $\overleftrightarrow{AB} \subset \overline{ABC}$ 이고, $\overleftrightarrow{A'B'} \subset \overline{A'B'C'}$ 이므로 $P \in \overline{ABC} \cap \overline{A'B'C'}$ 이다. 점 Q, R 도 마찬가지로 이 교선 위에 있다. 즉 이 세 점은 직선 $\overline{ABC} \cap \overline{A'B'C'}$ 위에 놓인다.

두 번째 경우: 두 삼각형이 한 평면 위에 놓여 있는 경우는 다음과 같은 아이디어를 사용한다. 첫 번째 경우의 증명을 공간에서 바라보면 우리 눈에는 평면에 있는 것처럼 보일 것이다. 그러니까 평면에 있는 것도 공간에 있는 것을 바라본 것이라고 생각하고 공간에서 증명하려는 것이다. (물론 평면에서 직접 증명하는 것은 훨씬 더 복잡하다.)

이제 이 삼각형을 평면에서 슬쩍 잡아 올려 세우려고 하는데 어느 방향으로 당기는가? 이제 이 두 삼각형이 똑같은 삼각형은 아니라고 가정하자. (똑같을 때는 증명할 것이 없다.) 따라서 이 두 삼각형의 대응하는 변들 가운데 적어도 하나는 서로 다르다. 즉, $\overleftrightarrow{BC} \neq \overleftrightarrow{B'C'}$ 이다.



이제 이 두 삼각형이 놓여 있는 평면을 Π 라 하고 Π 위에 있지 않은 점 Z 를 잡는다. 그러면 직선 AZ 는 Π 와 A 에서 만나는 직선이 된다. 이 직선 위에서 A 도 Z 도 아닌 점 a 를 하나 잡는다. 따라서 이 세 점 a, A, Z 는 모두 서로 다른 점이다.

이제 $\overleftrightarrow{ZA'}$과 $\overleftrightarrow{Xa}$는 모두 평면 $\overline{ZAX}$ 위에 있으므로 이 두 직선의 교점을

$$a' = \overleftrightarrow{ZA'} \cap \overleftrightarrow{Xa}$$

이라 놓자. 그러면 위의 그림과 같이 직선 $\overleftrightarrow{aa'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$은 한 점 X에서 만난다. 그러니까 $\triangle aBC$와 $\triangle a'B'C'$은 배경적 위치에 있다. "그리고 이 두 삼각형은 같은 평면 위에 있지 않다!"

문제 이 두 삼각형이 같은 평면 위에 있지 않음을 증명하여라.

첫 번째 경우의 증명에 따라 세 변의 교점

$$p = \overleftrightarrow{aB} \cap \overleftrightarrow{a'B'}, \quad q = \overleftrightarrow{aC} \cap \overleftrightarrow{a'C'}, \quad R = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$$

은 공선점이다. 이제 점 Z에서 평면 Π로 이 상황을 사영해 보면 상황

$$p = \overleftrightarrow{aB} \cap \overleftrightarrow{a'B'}$$

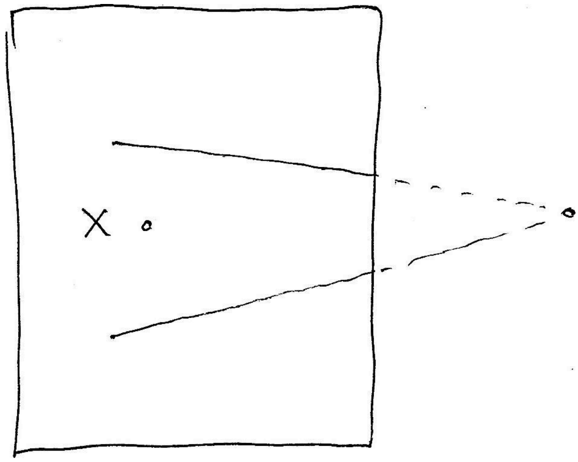
은

$$P = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$$

으로 사영된다. 나머지 두 점도 마찬가지이다. 그리고 이 세 점 p, q, R이 공선점이라는 사실은 P, Q, R이 공선점이라는 사실로 사영된다. ■

4.2.2 Desargues의 정리의 응용

데자르그의 정리는 다음과 같은 재미있는 문제에 응용할 수 있다.



그림과 같이 종이 위에 두 직선 l, l' 이 그려 있다. 그리고 이 두 직선 밖의 점 X 를 잡자. 이 점을 지나면서 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선 l'' 을 그리려고 한다. 그런데 주어진 두 직선이 만나는 점이 멀리 종이 밖에 있으면 이 때는 이 직선 l'' 을 어떻게 그리는가?

이제 다음과 같이 작도해 보자. 우선 X 를 지나면서 직선 l, l' 과 만나는 직선 m_1 을 잡고, m_1 위에 있는 점으로서 X 도 아니고 l, l' 과 만나는 점도 아닌 점을 하나 잡아 이 점을 지나며 직선 l, l' 과 만나는 직선을 두 개 더 그려 m_2, m_3 라 한다. 그리고

$$A = m_1 \cap l, \quad B' = m_2 \cap l, \quad C = m_3 \cap l$$
$$A' = m_1 \cap l', \quad B = m_2 \cap l', \quad C' = m_3 \cap l'$$

빈 쪽

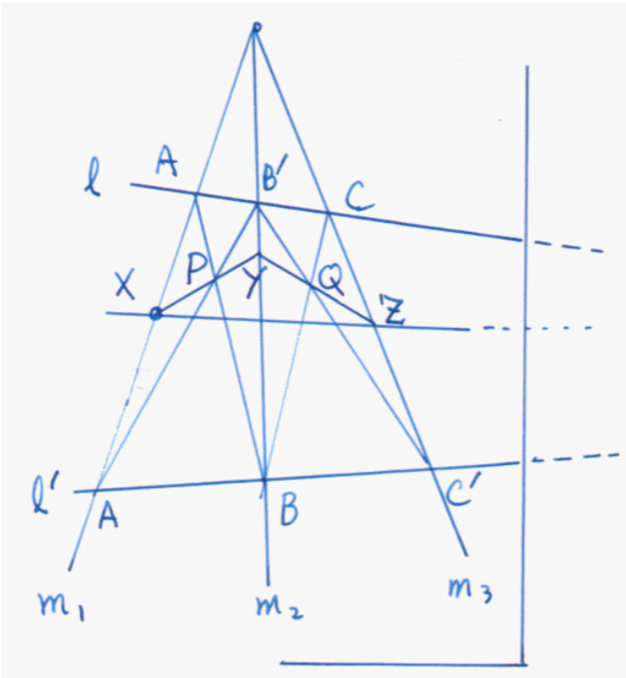
그러면 다음 그림과 같이 두 삼각형 $\triangle ABC$ 와 $\triangle A'B'C'$ 은 배경적인 위치에 있다. 그리고 변 AC 와 변 $A'C'$ 의 교점이 종이 밖의 교점이다.

이제 X 를 지나는 변을 가지며 위의 삼각형들과 같은 점에서 배경적으로 놓인 삼각형을 하나 더 만든다. 우선

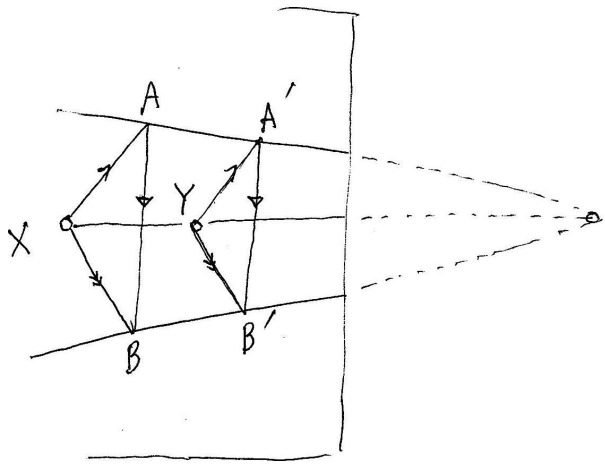
$$P = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}, \quad Q = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$$

를 잡고, 직선 $\overleftrightarrow{XP}$ 와 m_2 의 교점을 Y 라 하고, 직선 $\overleftrightarrow{YQ}$ 와 m_3 의 교점을 Z 라 하자. 그러면 삼각형 $\triangle XYZ$ 는 앞의 삼각형들과 같은 점에서 배경적으로 놓여 있다.

그러므로 대응하는 변인 직선 $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{A'C'}$, $\overleftrightarrow{XZ}$는 한 점에서 만나야 한다. 위의 그림에서와 같이 점 Z는 종이 위에 놓이므로 X와 연결할 수 있다. (필요하면 직선들 m_i 사이의 간격을 조정하여 X와 Z가 가깝게 할 수 있을 것이다.)



문제 다음 그림을 보고 위의 문제의 직선을 그리는 또 다른 방법을 설명하여라.



4.2.3 Pappus의 정리

그리스인 Alexandria의 Pappus($\Pi\acute{\alpha}\pi\pi o\varsigma$)는 AD 320년 경에 다음 정리를 발견하였다. AD 340년 경에 발간된 그의 책 Synagoge 즉 저작집에 들어있다. 다음 페이지의 그림은 이 책의 1589년 번역판의 표지이다.(Wikipedia에서)

정리 4.2.2 (Pappus)**.** 직선 l 위에 놓인 세 점 A, B, C와 직선 l' 위에 놓인 세 점 A', B', C'에 대하여

$$P = \overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B}, \quad Q = \overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C}, \quad R = \overleftrightarrow{BC'} \cap \overleftrightarrow{B'C}$$

라 할 때, 세 점 P, Q, R은 공선점이다.

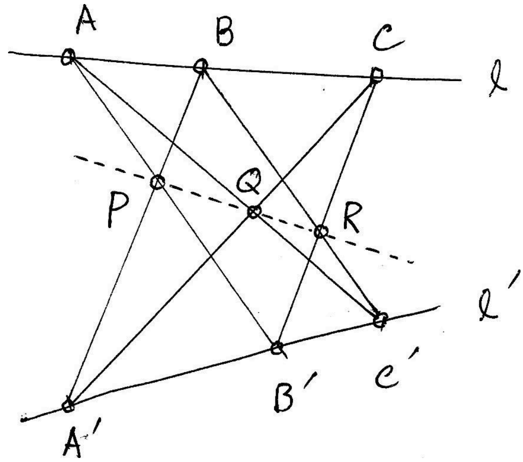
PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.

A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATÆ

In Latinum Conuersæ, & Commentarijs
Illustratæ.

VENETIIS,
Apud Franciscum de Franciscis Senensem.

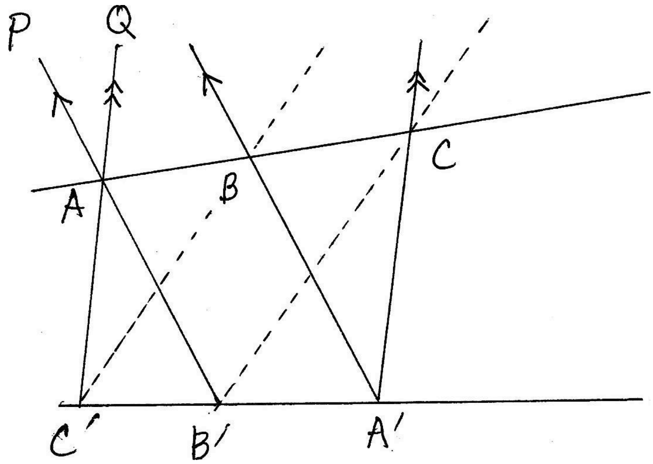
M. D. LXXXIX.



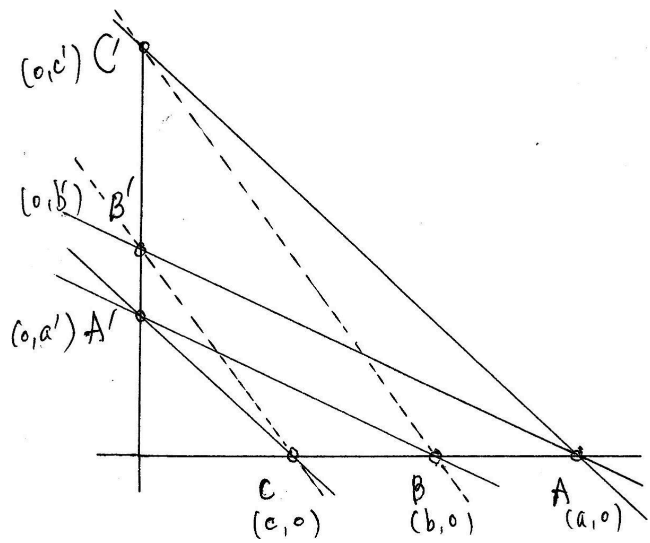
(증명) 우선 점 P와 Q를 잇는 직선을 그리고 나서 이 직선을 지평선이 되도록 투영하여 이 직선을 무한원점들의 직선이 되도록 만든다. 그러면 P, Q는 무한원점들이 되므로

$$\overleftrightarrow{AB'} \,//\, \overleftrightarrow{A'B}, \quad \overleftrightarrow{AC'} \,//\, \overleftrightarrow{A'C}$$

이 된다. 이제 그림은 다음과 같이 바뀌고 여기서 우리는 $\overleftrightarrow{BC'} \,//\, \overleftrightarrow{B'C}$ 임을 증명하면 된다.



이제 두 직선 l, l' 이 평행하면 이 사실은 명백하다. l, l' 이 평행하지 않으면 두 직선의 교점을 원점에 놓고 적절한 선형변환을 통하여 l 은 x 축이 되고 l' 은 y 축이 되도록 한다. 선형변환은 직선의 평행성을 보존하므로 우리가 보일 것은 두 직선 $\overleftrightarrow{BC'}$ 와 $\overleftrightarrow{B'C}$ 의 기울기가 같음을 보이면 된다.



이제 점 A, B, C, A', B', C' 의 좌표가 각각 $(a,0), (b,0), (c,0), (0,a'), (0,b'), (0,c')$ 이라고 하자. 그러면

$$\frac{a'}{b} = \frac{b'}{a}, \quad \frac{a'}{c} = \frac{c'}{a} \quad \Longrightarrow \frac{b'}{c} = \frac{c'}{b}$$

를 보이면 되며 이는 당연하다. ■

나중에 Pappus의 정리의 다른 증명을 알아본다.

4.3 Cross Ratio

이 절의 목표

1. 직선 위의 네 점의 cross ratio를 정의하고 이의 기하학적 정의와 대수적 정의의 관계를 공부한다.
2. 기하학적 정의를 확장하여 한 점을 지나는 네 직선의 cross ratio와 2차곡선 위의 네 점의 cross ratio를 정의한다.
3. 완전사각형에 대하여 공부한다.
4. 대수적 cross ratio의 정의에서 선형분수변환의 개념을 공부하고 이의 기하학적 성질을 알아본다.
5. 선형분수변환의 군의 개념과 그 행렬 표현을 공부한다.

들어가기

맨 처음 사영기하학을 생각해 낸 사람들은 르네상스 시대의 화가들이었다. 그들은 우리 눈에 보이는 사물을 보이는 그대로 화폭에 옮겨 놓고자 하여 사물이 우리 눈에 보이는 과정에 대하여 연구하게 되었고 공간에서의 빛의 경로가 직선이라는 사실과 우리 눈은 사실상 한 점이라는 기본적 사실을 토대로 사영기하학을 만들어 내었다. 중세 및 그 이전의 그림과 르네상스 이후의 그림을 비교하여 보면 이러한 방법론을 알아낸 것이 그림에 어떠한 영향을 미쳤는지를 알 수 있다.

미델하르니스의 가로수길[4)]

이러한 사영기하학을 제대로 이해하고 연구하려면 단순히 투시를 여러 번 사용하여 그림을 그려보는 것만으로는 부족하다는 것을 바로 알 수 있다. 이것은 우리가 데카르트 덕분에 사용하는 해석기하학적(대수적) 기법을 상상하여 보면 된다. 사영기하에서도 이러한 것이 필요하며 우리의 경험을 살려보면 대략 다음으로 집약된다. 우선 가장 기본이 되는 것으로 해석기하에서 사용하였던 좌표를 도입하는 것이다. 그리고 클라인이 이야기한 바를 따라 사영기하학의 기본 변환을 정식화하는 것이다. 그런 다음 이러한 사영변환에 대하여 변하지 않는 여러 가지 양(量) 가운데 기본이 되는 양을 찾는 것이다. 이 마지막 부분은 유클리드 기하에 빗대어 보면 두 점 사이의 유클리드 거리와 같은 양을 찾고자 하는 것이다.

4) https://en.wikipedia.org/wiki/File:Meindert_Hobbema_001.jpg

4.3.1 Cross ratio의 정의

두 개의 평행한 벡터 **v**, **w** $\neq$ **0**가 있으면,

$$\mathbf{v} = t\mathbf{w}$$

라고 나타낼 수 있다. 이 때 t를

$$t = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{w}}$$

로 나타내기로 하자. 그러면 유클리드 평면의 직선 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D의 cross ratio는

$$[A, B, C, D] = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}} \cdot \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}} \Big/ \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BD}}$$

라고 정의한다. 이는 숫자를 가지고 계산할 수도 있다. 수직선 위의 서로 다른 네 점 a, b, c, d가 있을 때 이의 cross ratio는

$$[a, c, b, d] = \frac{c-a}{d-a} \cdot \frac{d-b}{c-b} = \frac{c-a}{d-a} \Big/ \frac{c-b}{d-b}$$

즉 이것은 점 A와 B에서 각각 C와 D를 바라볼 때의 상대적 위치의 비의 비(복비)이다. 여기서 위치의 비를 생각할 때 상대적 위치를 나타내는 두 벡터가 같은 방향이면 이 비를 양수로 잡고 서로 다른 방향이면 이 비를 음수로 잡기로 한 것이다.

예를 들면 점 A, B, C, D가 수직선 위에서 각각 좌표가 $0, 3, 2, 4$인 점이라면

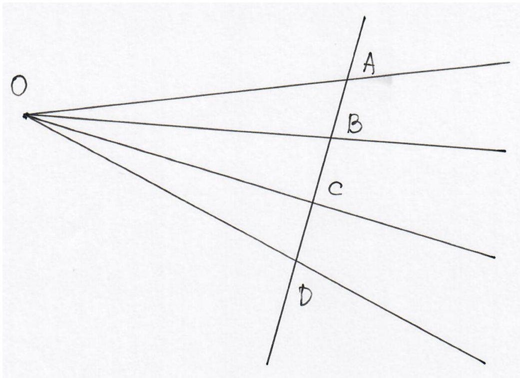
$$[A, B, C, D] = \frac{2-0}{4-0} \cdot \frac{4-3}{2-3} = -\frac{1}{2}$$

이다.

정리 4.3.1. 직선 l 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D가 있을 때, 직선 l 위에 있지 않은 한 점 O를 잡으면 다음이 성립한다.

$$[A, B, C, D] = \frac{\sin \angle AOC \sin \angle BOD}{\sin \angle AOD \sin \angle BOC}.$$

여기서 각을 재는 방향에 따라 각은 양수가 되기도 하고 음수가 되기도 한다.



(증명) 이 정리의 공식에서 보면 좌변의 복비가 가지는 부호와 우변의 식의 부호는 항상 일치할 수 밖에 없음을 알 수 있다. 따라서 양변의 절대값이 같으면 된다. 이제 그림에서 삼각형의 높이가 모두 같으므로

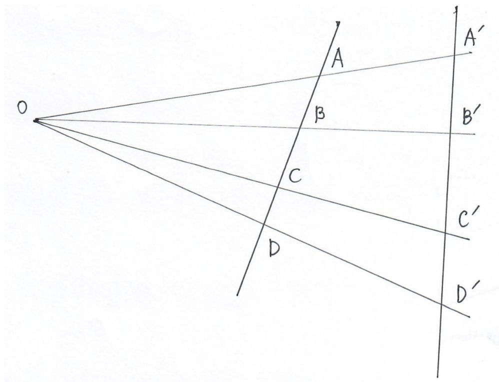
$$\begin{aligned}\big|[A,B,C,D]\big| &= \frac{AC}{AD}\frac{BD}{BC} = \frac{\triangle OAC}{\triangle OAD}\frac{\triangle OBD}{\triangle OBC} \\ &= \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OC}\cdot\sin\angle OAC}{\overline{OA}\cdot\overline{OD}\cdot\sin\angle OAD}\cdot\frac{\overline{OB}\cdot\overline{OD}\cdot\sin\angle OBD}{\overline{OB}\cdot\overline{OC}\cdot\sin\angle OBC} \\ &= \frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle AOD}\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle BOC}\end{aligned}$$

가 되어 증명되었다. ■

여기서 알 수 있는 것은 네 점의 복비가 실제로 네 점 사이의 거리보다는 주어진 직선 밖의 한 점 O에서 바라보는 각의 크기에 의해 좌우된다는 사실이다.

따름정리 4.3.2. 점 O에서 직선 l 위에 놓인 네 점 A, B, C, D를 투영하여 직선 l' 위의 네 점 A', B', C', D'으로 옮길 때 다음이 성립한다.

$$[A,B,C,D] = [A',B',C',D'].$$



(증명) 이제 한 점 O를 중심으로 하여 한 직선 l 위의 네 점을 다른 직선 l' 위에 투시하였다고 하자. 이 때 주어진 네 점의 l' 위의 그림자는 원래의 네 점과 점 O에서 볼 때 겹쳐 보이므로 이 점과 연결하는 직선들이 이루는 각도 일치한다. 따라서 그 sine 값도 일치하게 되어 복비도 일치함을 알 수 있다. 즉 복비는 투시를 할 때 변하지 않는 값이다. 따라서 일반적인 사영변환에 대하여도 변하지 않는다는 사실을 알 수 있다. ■

이제 생각할 것은 복비를 계산할 때 주어진 네 점 가운데 하나가 무한원점이라면 어떻게 되는가이다. 이 때에도 복비를 극한 개념을 써서 정의할 수 있다. 즉 점 A가 무한원점이라면 같은 직선을 따라 이 무한원점을 향해 움직이는 점 P를 생각한다. 그리고 복비를

$$[A, B, C, D] = \lim_{P \to A} [P, B, C, D]$$

라고 정의하기로 한다. 예를 들면 실수직선 위에서

$$[1, \infty, 2, 3] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1-2}{1-3} \cdot \frac{x-3}{x-2} \right) = \frac{1}{2}$$

이다.

여기서 주목할 사실은 투시를 통하여 이 네 점 가운데 하나가 무한원점으로 투시되는 경우에도 복비가 변하지 않는다는 사실이다.

문제

1. 이 사실을 확인하여라. 또, 복비는 사영직선 위에서 잘 정의되는 개념이 됨을 설명하여라.
2. $[\infty, b, c, d] = \dfrac{d-b}{c-b}$ 임을 확인하여라.
3. 네 점 가운데 같은 점이 둘 있어도 복비를 정의할 수 있음을 보여라. 단 이 때는 복비의 값이 ∞를 포함하게 되며 따라서 복비는 값을 사영직선에서 갖는다고 할 수 있다.

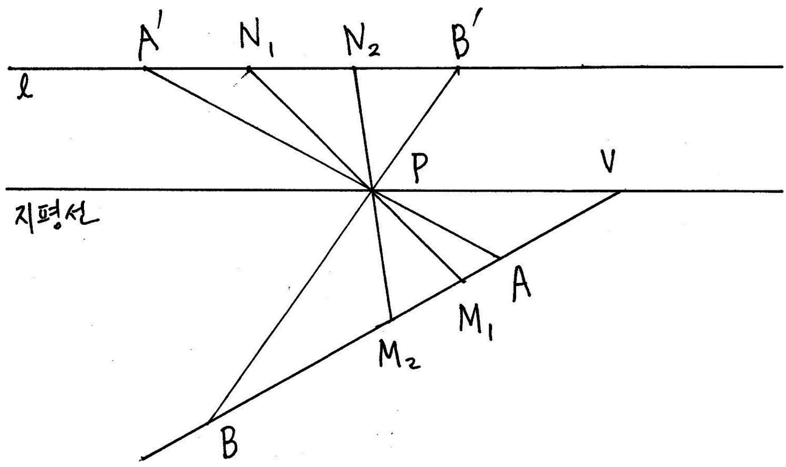
문제 [Jennings, Francis] 다음 그림에서 캔버스에 선분 AB가 그려져 있다. 실제 평면에서 이 선분의 3등분점을 캔버스 위에 그리기 위하여 다음과 같이 작도한다.

선분 AB가 지평선과 만나는 (소실)점을 잡아 V라고 하자. 그리고 지평선 위쪽에 지평선과 평행한 직선 l을 그린다. 이제 지평선 위에 V가 아닌 점 P를 잡는다. 그리고

$$A' = \overleftrightarrow{AP} \cap l, \quad B' = \overleftrightarrow{BP} \cap l$$

이라 놓자. 직선 l 위의 선분 $A'B'$을 삼등분하는 점을 N_1, N_2라 하고 점 $M_i = \overleftrightarrow{N_iP} \cap \overleftrightarrow{AB}$을 잡으면 M_1, M_2는 선분 AB를 3등분한다.

이 작도가 실제로 평면 위에서 선분 AB를 3등분 하는 점을 캔버스에 그려줌을 증명하여라. (힌트: 점 P에서의 투영에 의하여 직선 $\overleftrightarrow{AB}$ 위의 점 V는 직선 l 위에서의 무한원점 W에 대응한다. 이제 $[V, A, B, M_i] = [W, A', B', N_i]$를 계산해 보아라.

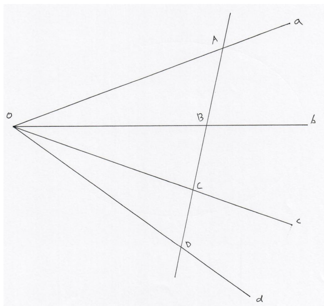


4.3.2 여러 가지 cross ratio

직선 위의 점들에 대한 cross ratio와 마찬가지로 한 점을 지나는 직선들에 대하여도 cross ratio를 생각할 수 있다. 사영평면 위에서 한 점 P를 지나는 네 직선 $l_1, \ldots, l_4$이 주어졌다고 하자. 이제 이 직선들과 만나며 점 P를 지나지 않는 직선 l을 잡아 $P_i = l \cap l_i (i = 1, \ldots, 4)$라고 하자. 이 때

$$[l_1, l_2, l_3, l_4] = [P_1, P_2, P_3, P_4]$$

로 정의하기로 하자.

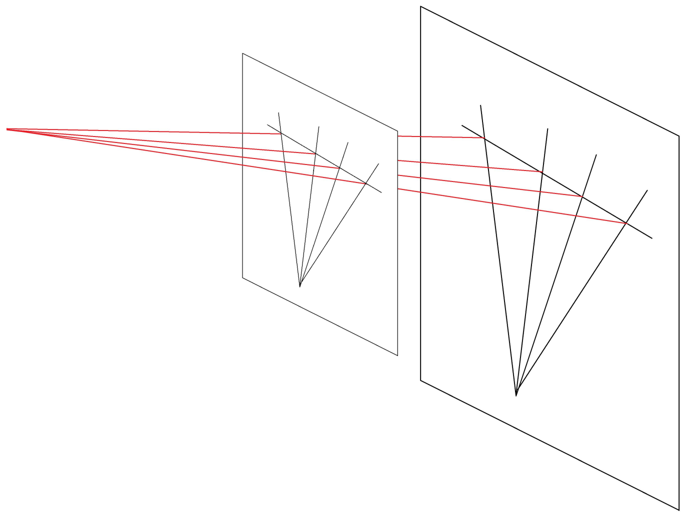


정리 4.3.3. *3*차원 사영공간에서 한 평면 Π_1 위에 놓이는 네 직선 $l_1, \ldots, l_4$를 이 평면 밖의 점 X에서 투영하여 평면 Π_2 위의 직선 $l'_1, \ldots, l'_4$로 보낼 때 다음이 성립한다.

$$[l_1, l_2, l_3, l_4] = [l'_1, l'_2, l'_3, l'_4].$$

따라서 직선의 *cross ratio*는 사영변환에 대하여 불변이다.

이 정리의 증명은 다음 그림에서 명백하다.

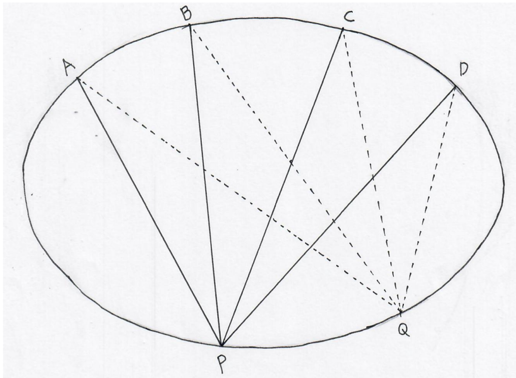


문제 이 정리의 증명을 마무리하여라.

직선 위의 점에 대하여만 cross ratio가 정의되는 것은 아니다. 2차곡선 위의 네 점에 대하여도 cross ratio를 생각해 볼 수 있다. 사영 평면 위에서 2차곡선이라 함은 유클리드 평면의 2차곡선을 사영 평면 위로 사영한 것을 말한다.

정리 4.3.4. A, B, C, D가 이차곡선 C의 네 점이라 하자. 그러면 임의의 $P, Q \in C$에 대하여 다음이 성립한다.

$$[\overleftrightarrow{PA}, \overleftrightarrow{PB}, \overleftrightarrow{PC}, \overleftrightarrow{PD}] = [\overleftrightarrow{QA}, \overleftrightarrow{QB}, \overleftrightarrow{QC}, \overleftrightarrow{QD}].$$



(증명) 위의 정리 4.3.3에 의하여 네 직선의 cross ratio는 사영에 의하여 변하지 않음을 알고 있다. 그러므로 주어진 이차곡선 C를 사영변환하여 원이라고 가정하여도 된다. 이제 점 A, B, C, D 사이의 호의 원주각은 점 P에서나 점 Q에서나 모두 서로 같게 되며 따라서 이 각의 sine값으로 정해지는 네 직선의 cross ratio도 일치한다. ■

이 불변인 cross ratio를 이차곡선 C 위의 네 점에 대한 cross ratio라고 정의한다.

문제 위의 정리의 증명을 따라서 구면 위의 한 대원 위에 놓이는 임의의 네 점의 cross ratio를 정의할 수 있으며 이는 구면 위의 어느 점에서 어떤 평면으로의 사영에 대하여도 변하지 않음을 설명하여라. 특히 구면의 어떤 점에서의 stereographic projection에 대하여도 변하지 않음을 보여라.

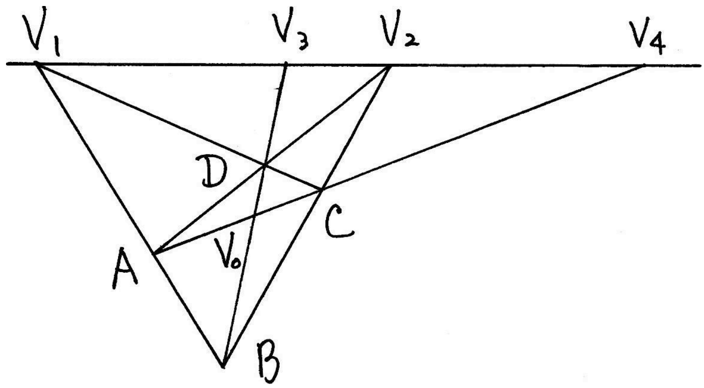
4.3.3 완전사각형과 조화분할

사영평면 위의 네 점 A, B, C, D를 생각하자. 이 가운데 어느 세 점도 한 직선위에 놓이지 않는다면 이 점들을 연결하는 6개의 직선 $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BD}$와 이들이 만나서 만드는 (원래 4점도 포함하는) 7개의 점을 완전사각형(complete quadrangle, complete quadrilateral)이라고 부른다.

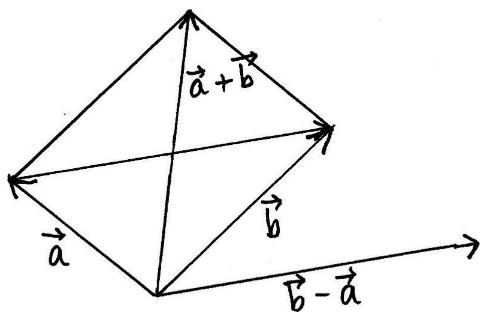
이제 완전사각형의 나머지 세 점을 V_0, V_1, V_2 라 하자. 그리고 직선 $l = \overleftrightarrow{V_1V_2}$ 에 대하여

$$V_3 = \overleftrightarrow{BD} \cap l, \quad V_4 = \overleftrightarrow{AC} \cap l$$

이라 정의하자.



직선 l 위에서 $[V_1, V_2, V_3, V_4]$ 를 계산해 보기 위하여 직선 l 이 무한원직선이라고 가정하자. 그러면 사각형 $\square ABCD$ 는 평행사변형이 된다. 점 B 를 원점에 놓고 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ 라 하면 $\overrightarrow{BD} = \vec{a} + \vec{b}$ 가 된다.



이제

$$
\begin{aligned}
&= [\overleftrightarrow{BV_1}, \overleftrightarrow{BV_2}, \overleftrightarrow{BV_3}, \overleftrightarrow{BV_4}] \\
&= \frac{\sin\angle(\vec{a}, \vec{a}+\vec{b})\ \sin\angle(\vec{b}, \vec{b}-\vec{a})}{\sin\angle(\vec{a}, \vec{b}-\vec{a})\ \sin\angle(\vec{b}, \vec{a}+\vec{b})} \\
&= \frac{\|\vec{a}\|\ \|\vec{a}+\vec{b}\| \sin\angle(\vec{a}, \vec{a}+\vec{b})\ \|\vec{b}\|\ \|\vec{b}-\vec{a}\| \sin\angle(\vec{b}, \vec{b}-\vec{a})}{\|\vec{a}\|\ \|\vec{b}-\vec{a}\| \sin\angle(\vec{a}, \vec{b}-\vec{a})\ \|\vec{b}\|\ \|\vec{a}+\vec{b}\| \sin\angle(\vec{b}, \vec{a}+\vec{b})} \\
&= \frac{\big(\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})\big)\cdot\big(\vec{b}\times(\vec{b}-\vec{a})\big)}{\big(\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{a})\big)\cdot\big(\vec{b}\times(\vec{a}+\vec{b})\big)} = -1
\end{aligned}
$$

이다.

문제 사영 직선 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 위의 세 점 a, b, c에 대하여 $[a, b, c, d] = -1$ 되는 점 d는 항상 존재하고 단 하나 뿐임을 보여라.

사영 직선 l 위에 세 점 V_1, V_2, V_3가 주어져 있을 때 $[V_1, V_2, V_3, V_4] = -1$ 되는 V_4를 작도하는 것은 위의 작도를 역으로 따라 하면 된다. 즉, V_1을 지나는 두 직선 l_1, l_2를 잡고, V_3를 지나는 직선 l_3를 잡아. 위의 그림과 같이

$$B = l_1 \cap l_3, \quad D = l_2 \cap l_3$$

를 정한다. 그리고 순서대로

$$A = \overleftrightarrow{DV_2} \cap l_1, \quad C = \overleftrightarrow{BV_2} \cap l_1, \quad V_4 = \overleftrightarrow{AC} \cap l,$$

라 정의해 나가면 위의 계산에서 $[V_1, V_2, V_3, V_4] = -1$ 되지 않으면 안 된다.

위의 문제에 따라 이렇게 되는 V_4는 단 하나 뿐이다. 이 V_4를 V_1, V_2, V_3의 네 번째 조화점(fourth harmonic)이라고 하고, $[V_1, V_2, V_3, V_4] = -1$ 인 네 점은 사영 직선을 조화분할하고 있다(in harmonic division))고 한다.

문제 지금 까지 공부한 것들을 활용하여 캔버스에 하나의 사각형이 주어졌을 때 이 사각형이 단위 정사각형이 된다고 가정하고 이 옆에 변이 평행하며 변의 길이가 정수인 사각형들을 3개 그리고 그 위에 정수 높이의 직육면체를 그려라. 단, 단위 높이는 임의로 정하고 수직방향의 소실점도 임의로 정할 것. (힌트: 지평선을 먼저 찾는다.)

4.3.4 선형분수함수(FLT)

복비로 주어지는 함수를 생각하여 보자. 서로 다른 세 실수 a, b, c에 대하여 x의 함수

$$f(x) = [x, a, b, c] = \frac{x-b}{x-c} \Big/ \frac{a-b}{a-c}$$

를 생각하면 이 함수는 $f(a) = 1$, $f(b) = 0$, $f(c) = \infty$(이 직선의 무한원점)라는 값을 가지는 함수이다. 이 함수는 자연스럽게 $f(\infty) = (a-c)/(a-b)$라고 생각할 수 있으므로 사영직선에서 사영직선으로 정의된 함수라고 생각할 수 있다. 이렇게 x의 일차함수의 비(ratio)로 주어지는 함수를 일반적으로 선형분수함수(fractional linear transformation, FLT, linear fractional transformation) 또는 Möbius transformation 이라고 부른다. (상수함수가 되는 경우는 제외하기로 한다.)

이 때, 네 점 $f(x), 1, 0, \infty$의 이 순서대로의 복비는 $f(x)$임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 함수 $f(x)$는 주어진 네 점 x, a, b, c에 대하여 각각의 a, b, c가 수직선의 $1, 0, \infty$라고 가정할 때 $f(x)$가 어느 점에 있으면 두 복비 $[x, a, b, c]$와 $[f(x), 1, 0, \infty]$가 같아지는가 하는 물음의 답을 주는 함수라고 할 수 있다.

선형분수함수는 사영기하와 매우 밀접한 관계를 가지고 있다. 이를 알아보기 위해 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 위에서 정의된 선형분수함수

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

를 생각해 보자. 이 함수의 값을 수직선 위의 점을 나타내며 이 점을 사영직선의 점이라고 생각하면 동차좌표가 $(f(x), -1) \equiv (ax+b, -(cx+d))$인 점이 된다. 이 점이 수직선 위의 점 x의 상이므로 원상 x도 동차좌표로 생각해서 $(x, -1)$이라고 하면 이 함수관계는 행렬을 이용하여

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ -1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ax+b \\ -cx-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$$

로 나타낼 수 있다. 이 관계를 보면 선형분수함수는 동차좌표의 입장에서는 선형변환에 불과하다는 것을 이야기한다.

이제 선형분수함수 두 개를 합성하여보자. 동차좌표를 써서

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ -1 \end{pmatrix} := A \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} g(x) \\ -1 \end{pmatrix} := B \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$$

와 같이 나타내어지는 두 함수의 합성 $f \circ g$를 계산하면

$$\begin{pmatrix} (f \circ g)(x) \\ -1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} g(x) \\ -1 \end{pmatrix} = AB \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$$

이므로 이 함수는 행렬 AB 로 만들어진 선형분수함수가 된다. 따라서 선형분수함수의 합성은 행렬의 곱셈(선형변환의 합성)에 해당한다. 한편 단위행렬 I 로 만들어진 선형분수함수는 항등함수 id 임을 알 수 있다.(항등함수는 $id(x) = x$ 로 정의되는 함수이다.) 또,

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ -1 \end{pmatrix} := A \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$$

로 주어진 함수에 대하여

$$\begin{pmatrix} g(x) \\ -1 \end{pmatrix} := A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$$

라고 정의하면 선형분수함수 g 는 f 의 역함수가 된다.

문제 서로 다른 세 실수 a, b, c가 주어졌을 때, 선형분수함수 $f(x) = (Ax+B)/(Cx+D)$로서 $f(a) = 1$, $f(b) = 0$, $f(c) = \infty$인 것은 단 하나뿐임을 보여라. 이 사실을 써서 선형분수함수 가운데 $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, $f(c) = c'$ (a', b', c' 도 서로 다른 세 실수)을 만족시키는 것도 하나뿐임을 보여라.

정리 4.3.5. 사영직선 위의 선형분수함수는 *cross ratio*를 보존한다.

(증명) 이 정리는 직접 계산하여 증명하여도 된다. 그러나 선형분수함수를 다음과 같이 생각하여 보자.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \frac{1}{x + \frac{d}{c}}$$

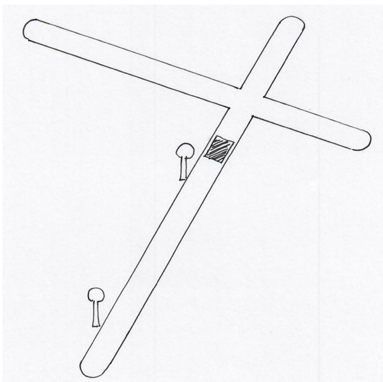
이를 보면 $f(x)$는 네 개의 사상

$$f_1(x) = x + \frac{d}{c}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = \frac{ad-bc}{c^2} x, \quad f_4(x) = \frac{a}{c} + x$$

을 차례로 합성한 함수이다. 이 가운데 f_1, f_4는 직선 위에서의 평행이동이고, f_3는 닮음사상(homothety)이다. 이 사상들이 cross ratio를 보존하는 것은 당연하므로 우리는 $f_2(x) = 1/x$가 cross ratio를 보존한다는 사실을 보이면 충분하다.

문제 함수 $f_2(x) = 1/x$는 cross ratio를 보존함을 보여라.

이로부터 증명되었다. ■



문제 (김명환, 김홍종) 위의 그림은 신호등이 2km마다 있는 차로에 자동차가 달리는 것을 찍은 사진이다. 이 자동차는 교차로에서 몇 km 거리에 있는가? (단, 사진에서 교차로와 처음 신호등 사이의 거리는 1cm이고, 교차로와 두 번째 신호등 사이의 거리는 3cm이며, 교차로와 자동차(파란 사각형) 사이의 거리는 3/7cm이라 한다.

사영변환에 대하여 불변인 cross ratio를 사영변환의 불변량(invariant)[5] 이라고 한다. (일반적으로 주어진 변환에 대하여 불변인 양을 불변량이라고 한다.)

5) 우리가 보통 사람의 얼굴 모습을 보고 구별할 때 바라보는 방향이 조금 바뀌어도 별 어려움 없이 잘 구별하고 인식한다. 이것은 당연하다고 느낄지도 모르지만 로봇에게 사물을 보는 법을 가르치는 사람에게는 매우 신기하고도 어려운 문제이다. 얼굴 윤곽의 구부러진 모습만을 보고도 누구인지 알 수 있는 것은 구부러진 정도를 정확히 기억하는 것으로는 부족하다. 방향이 바뀔 때 구부러져 보이는 정도가 어떻게 변하는지도 알고 있지 않으면 안 된다. 그러나 우리가 사람을 볼 때마다 윤곽선의 곡률을 계산하고 있지는 않다고 누구나가 생각할 것이다.
그러면 어떻게 윤곽선의 모양을 파악하는 것인가. 어떤 사람에게 같은 곡선을 여러 각도에서 보여 줄 때 사람은 이러한 곡선이 바라보는 위치를 변화시켜도 변하지 않는 무엇인가를 느낀다고

4.3.5 선형분수함수의 군

선형분수함수를 잘 이해하기 위하여 선형분수함수들의 집합을

$$M = \left\{ f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} : ad - bc \neq 0 \right\}$$

라 하고, 2×2 정칙(non-singular)행렬의 집합을 $Gl(2)$라고 부르기로 한다. 그러면 위에서 설명한 바에 따르면 $Gl(2)$의 행렬 하나마다 M의 원소가 하나씩 대응된다. 그 대응을 Φ라고 부르기로 하 자. 즉, $\Phi : Gl(2) \to M$이다. 그러면 앞 절에서 알아본 Φ의 성질들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

1. Φ는 함수이다.
2. $\Phi(AB) = \Phi(A) \circ \Phi(B)$.
3. $\Phi(I) = id$.
4. $\Phi(A^{-1}) = \Phi(A)^{-1}$.

이미 짐작하였을 것이지만 M은 함수의 합성에 관하여, 그리고 $Gl(2)$는 행렬의 곱셈에 관하여 군을 이루고 있다. 이 때 대응 Φ가 하는 역할을 말로 설명하면 다음과 같다: $Gl(2)$의 원소(행렬)와 M의 원소(함수)를 Φ에 의하여 대응시켰을 때,

1. 두 행렬의 곱에 대응하는 함수는 각각의 행렬에 대응하는 함수의 합성에 대응한다.
2. 항등행렬에 대응하는 함수는 항등함수이다.

생각된다. 요사이 이러한 분야를 연구하는 사람들은 이러한 변하지 않는 것이 무엇인가를 찾고 이를 응용하여 로봇에게 사물을 판단하도록 가르치는 시도를 하고 있다. 이러한 변하지 않는 것으로 가장 그럴듯한 것은 사영변환에 대하여 변하지 않는 불변량이다. 즉 직선의 네 점에 대한 복비가 사영변환에 대한 불변량이듯이, 굽어있는 곡선의 어떠한 양이 사영변환에 불변일까를 구하려고 한다. 계산하기 쉬운 불변량을 많이 구할 수 있으면 이러한 문제 해결에 도움이 된다는 것은 당연하다.

3. 어떤 행렬 A 의 역행렬에 대응하는 함수는 A에 대응하는 함수의 역함수이다.

이러한 관계를 군 $Gl(2)$ 에서 군 M 으로의 대응 Φ가 곱셈구조를 보존한다고 이야기한다. 이렇게 두 개의 서로 다른 대상 (예를 들면 군) 사이에 대응(함수)을 주어서, 이 대응을 통하여 구조가 보존된다고 할 때, 이 대응을 준동형사상(準同形寫像;homomorphism)이라고 부른다. 위의 예는 군의 준동형사상(group homomorphism)이다.

이제 이러한 행렬 가운데 같은 선형분수함수로 대응되는 행렬들은 어떤 것이 있는가 알아보자. $(ax+b)/(cx+d)$ 꼴의 함수에서 계수들을 살펴보면, 이 계수들에 동시에 0이 아닌 실수배를 하여도 이 함수값에는 아무런 변동이 없음을 알 수 있다. 따라서 $\lambda \neq 0$ 일 때, 두 행렬

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

는 항상 같은 선형분수함수를 정의함을 알 수 있으며, 직관적으로 생각하여 역으로 두 행렬이 같은 선형분수함수를 주려면 이러한 관계에 있지 않으면 안 된다는 것도 알 수 있다.

문제 이 사실을 확인하여라. 즉, 두 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$ 가 정의하는 선형분수함수가 일치하면 적당한 $\lambda \neq 0$가 존재하여

$$(a, b, c, d) = \lambda(a, b, c, d)$$

가 성립함을 보여라.

이제 $Gl(2)$ 의 두 행렬을 잡아 보았을 때 위와 같은 관계가 있으면 그 두 행렬은 같은 것이라고 부르기로 하자. 여기서 같다는 말은 "두 행렬이 정의하는 선형분수함수가 같다"는 말로 해석하면 좋다. 그러면 이 "같다"는 말은 다음과 같은 성질을 갖는다.

1. 어느 행렬도 자기 자신과는 "같다".

2. 행렬 A 가 행렬 B 와 "같으면", 행렬 B는 행렬 A와 "같다".

3. 행렬 A 가 행렬 B 와 “같고”, 행렬 B가 행렬 C와 “같으면”, 행렬 A는 행렬 C 와 “같다”.

일반적으로 이러한 성질을 갖는 관계를 동치관계라고 한다.

이를 생각하여보면 하나의 선형분수함수로 대응되는 행렬들을 모두 묶어서 마치 하나인 것처럼, 즉 서로 같은 것처럼, 생각할 수도 있다. 이들은 하나하나가 서로 다른 행렬이지만 선형분수함수를 공부함에 있어서는 한 묶음 안에 있는 행렬들은 모두 같은 역할을 하는 행렬들이기 때문이다.

이렇게 서로 “같은” 행렬들을 묶어서 하나로 보기로 하면 $Gl(2)$는 이러한 묶음들로 나뉘게 되고 이러한 묶음 하나하나는 M의 원소 하나씩과 1대1로 대응된다. 이러한 묶음들로 나눈 $Gl(2)$를 $Gl(2)/\sim = PGL(2)$라고 부르기로 하면 $PGL(2)$는 마치 M을 보고 있는 것과 똑 같아 보인다.

이제 $PGL(2)$의 두 묶음을 잡아 그 가운데서 한 행렬씩을 뽑아서 곱하여보면 그 결과는 그 두 묶음에 해당하는 선형분수함수의 합성함수를 정의하는 행렬 가운데 하나일 수밖에 없다. 따라서 그 두 묶음 가운데서 한 행렬씩 뽑는 방법을 어떻게 택하여도 그 곱한 결과는 같은 묶음, 즉 합성함수에 해당하는 묶음, 안에 있는 행렬 가운데 하나여야 한다. 이 말은 두 묶음을 잡으면 행렬의 곱셈에 의하여 행렬의 곱이 들어가는 묶음이 단 하나 결정된다는 말이며, 따라서 이 곱이 들어가는 묶음을 앞의 두 묶음의 “곱”이라고 하여도 큰 무리가 없음을 알 수 있다. 즉 $PGL(2)$는 자체로 곱셈을 가지고 있다고 할 수 있다. 이 곱셈은 $Gl(2)$의 곱셈으로부터 바로 생겨나며, M의 합성과 똑같은 역할을 하는 곱셈이라는 것을 알 수 있다.

이제 $\Phi : PGL(2) \to M$을 이러한 대응이라고 하자. 즉, $PGL(2)$에서 행렬의 묶음을 하나 뽑아 이로부터 만들어지는 선형분수함수를 찾아내는 대응이다. 그러면 Φ는 1대1대응이며 위의 Φ가 가 지고 있는 성질 (1) $\sim$ (4)을 모두 만족시킨다. 이러한 성질을 가지는 1대1대응을 보통 두 군 사이의 동형사상(同型寫像;isomorphism)이라 부른다.

4.4 사영기하의 쌍대성

이 절의 목표

1. 점(벡터)와 직선(1차함수)의 계산 관계를 음미하고 사영기하의 쌍대성의 의미를 공부한다.
2. 대표적인 예로서 데자르그의 정리와 파푸스의 정리의 쌍대 형태를 공부한다.
3. 선형대수의 쌍대성과의 관계를 조명한다.
4. 사영평면의 대수곡선과 동차방정식의 관계를 공부한다.
5. 2차곡선의 쌍대곡선과 파스칼, 브리앙송의 정리를 공부한다.

들어가기

사영기하 발견이 현대 수학에 미친 여러 영향 가운데서도 가장 두드러진 것은 쌍대성이라는 새로운 개념을 정립하도록 도와준 것이다. 쌍대성은 사영기하에서 가장 쉽게 인식되었고, 19세기에 벡터와 텐서의 선형기하를 통하여 그 수학적 범적용성을 발견하였으며 20세기 추상수학 도입의 초석이 되었다고 할 수 있다.

4.4.1 쌍대성

위에서 이야기한 동차좌표를 사용하여 보면 평면의 점은 세 개의 실수(공간의 벡터)를 써서 나타낼 수 있으며 이들 벡터가 서로 같은 방향이면 같은 점을 나타내는 좌표라고 이해할 수 있다. 한편 이 공간의 직선은 동차좌표를 사용하면

$$ax + by + cz = 0$$

꼴의 (동차) 일차방정식으로 나타내어진다. 이 직선(또는 삼차원 공간의 평면)을 정하여 주는 정보는 이 직선의 방정식의 계수를 이루고 있는 세 실수 a, b, c가 가지고 있다. 따라서 이 세 실수를 이 직선을 나타내는 수, 즉, 이 직선의 좌표라고 볼 수 있다. 이제 이 직선을 (a, b, c)로 나타내기로 하자.

여기서 주의할 점은 위의 직선은 방정식

$$2ax + 2by + 2cz = 0 \quad \text{또는} \quad -3ax - 3by - 3cz = 0$$

등으로 나타내어도 된다는 사실이다. 즉 (a, b, c)가 나타내는 직선과 $(2a, 2b, 2c)$나 $(-3a, -3b, -3c)$가 나타내는 직선이나 모두 같은 직선이라는 것이다. 즉 직선을 나타내는 (계수)좌표는 시작부터 동차좌표가 될 운명에 있는 것이다.

고등학교 때까지는 이러한 사실이 매우 불편한 사실이었다. 직선 하나에 방정식이 하나씩 있었으면 편리하리라고 생각했던 사람들이 많았을 것이다. 그러나 사실은 직선도 점도 동차좌표와 같이 여러 개로 나타내는 방법이 있는 것이 더욱 발전된 방법이라고 생각되게 되었고, 이것이 별로 복잡한 문제를 야기하는 것도 아니라는 것을 알게 되었다.

이러한 생각을 통하여 보이는 것은 대수적으로 나타내어 볼 때 점이 가지고 있는 정보(좌표)와 직선이 가지고 있는 정보(계수)가 매우 유사하다는 것이다. 사실 유사한 정도가 아니라 완전히 똑같아서 구별할 수 없어 보인다. 이 점을 놀라운 사실로 받아들이는 사람들도 있을 것이다. 점은 한 점이지만 직선은 여러 점으로 이루어져 있어서 훨씬 많은 정보를 가지고 있을 듯싶지만 실제로는 같은 양의 정보를 가지고 있는 것처럼 보인다.

더욱 재미있는 것은 한 점 (x, y, z)와 그 점을 지나는 직선 (a, b, c)는 관계식

$$ax + by + cz = 0$$

를 만족한다. 그런데 이 방정식은 (a, b, c)와 (x, y, z)에 대하여 대칭인 모양을 하고 있다. 한 점이 한 직선 위에 있을 때, 즉, 한 직선이 한 점을 지날 때, 이러한 관계를 이야기하는 관계식에서 보면 두 서로 다른 개념인 점과 직선은 구별할 수 없어 보인다. 즉 이렇게 점과 직선을 동차좌표로 나타내며 보면 직선을 점이라고 생각하고 점을 직선이라고 생각해도 될 것 같다. 즉 방정식

$$ax + by + cz = 0$$

에서 (a, b, c)가 계수벡터이고 (x, y, z)를 미지수라고 생각하는 것이 일반적이지만 (x, y, z)가 계수벡터이고 (a, b, c)가 미지수라고 생각하면 안 되는 이유를 찾을 수가 없다.

이제 새로운 생각으로 점과 직선을 바꾸어 이야기하여보자. 즉 직선 "l이 점 P를 지난다"는 것을 "직선 P가 점 l을 지난다"고 말하면 어떤 일이 벌어지는가? 그 말하고자 하는 뜻은 완전히 달라지지만 관계식은 변함이 없으므로 방정식이 성립하는가 아닌가 하는 내용은 변하지 않을 것이다.

내용을 더 자세히 살펴보자. 두 직선

$$ax + by + cz = 0, \quad a'x + b'y + c'z = 0$$

의 교점으로 한 점 (x_0, y_0, z_0)를 얻었다고 하자. 이 말은 이 두 직선의 방정식을 동시에 만족하는 점의 좌표를 구하니 (x_0, y_0, z_0)가 되었다는 뜻이다. 이제 여기서 점과 직선을 바꾸어서 이야기하면 두 직선은 두 점 (a, b, c), (a', b', c')이 되고, 위의 두 직선이 나타내는 방정식은 이 두 점이 지나 는 직선의 방정식

$$xa + yb + zc = 0, \quad xa' + yb' + cz' = 0 \tag{4.1}$$

이 된다. 이러한 두 점을 지나는 두 방정식을 동시에 만족하는 (x, y, z)를 구한다는 말은 이 두 점 (a, b, c), (a', b', c')가 동시에 만족하는 방정식 (4.1)을 구한다는 뜻이고 이렇게 구해진 (x, y, z)는 두 점을 잇는 직선의 방정식의 계수가 되고 만다. 즉, "두 직선이 만나는 점"은 "두 점을 이은 직선"이라는 말로 바뀌게 되는 것이다.

이렇게 서로 뒤바꾸어 말하면 초등기하학에서 하는 많은 이야기들을 뒤집어서 이야기할 수 있다. 이렇게 뒤집을 때 관계식(방정식)은 변함이 없으므로 원래의 이야기가 옳으면 뒤집은 이야기도 옳고, 원래가 그르면 뒤집은 것도 그르게 된다. 그러니까 어떤 명제가 옳다는 것을 알면 자동으로 그것을 뒤집은 쌍대 명제도 옳다는 것을 알 수 있다. 이러한 관계를 사영기하학에서의 쌍대성(duality)이라고 부른다.

사영기하학이 생겨난 것은 17세기의 데자르그(Desargues)와 파스칼(Pascal)에 의해서였다. 그러나 위와 같은 생각은 그보다는 꽤 나중인 19세기 초에 생겼다고 보이며 이러한 개념이 제대로 활용되게 된 것은 아마도 19세기 말에서 20세기 초를 넘어 들어오면서였다고 생각된다.

4.4.2 쌍대 정리의 예

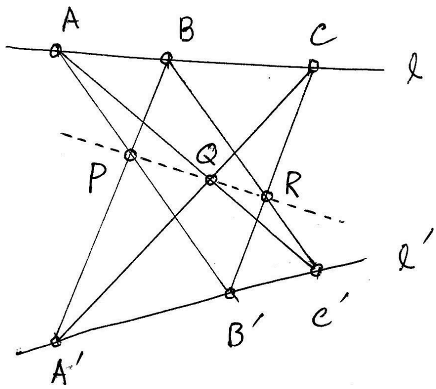
Pappus의 정리의 쌍대 정리

이제 이러한 쌍대성을 직접 사용하여 보자. 앞 절에서 공부한 Pappus의 정리는 사영기하학의 기본정리이므로 이것에 쌍대성을 적용하여 점과 직선을 바꾸어 읽어보자. 우선 Pappus의 정리는 다음과 같다.

정리 4.4.1 (Pappus의 정리 다시)**.** 직선 l 위에 놓인 세 점 A, B, C와 직선 l' 위에 놓인 세 점 A', B', C'에 대하여

$$P = \overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B}, \quad Q = \overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C}, \quad R = \overleftrightarrow{BC'} \cap \overleftrightarrow{B'C}$$

라 할 때, 세 점 P, Q, R은 공선점이다.



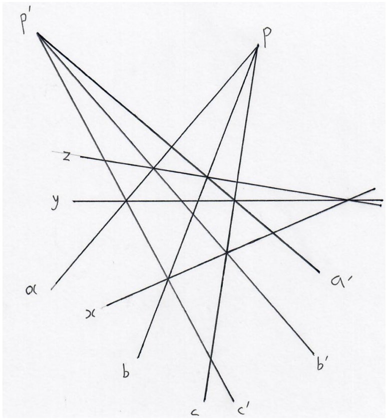
이것을 쌍대 형태로 바꾸기 위해서 위의 정리의 명제를 하나씩 바꾸어 나가는 것을 위의 정리와 다음 정리를 한 자씩 비교하면서 보기 바란다.

정리 4.4.2. 점 P를 지나는 세 직선 a, b, c와 점 P' 을 지나는 세 직선 a', b', c'에 대하여

$$x = \overleftrightarrow{(a \cap b')(a' \cap b)}, \quad y = \overleftrightarrow{(a \cap c')(a' \cap c)}, \quad z = \overleftrightarrow{(b \cap c')(b' \cap c)}$$

라 할 때, 세 직선 x, y, z는 공점선이다.

이 정리를 그림으로 나타내어 보면 다음과 같다.



여기서 $x = \overleftrightarrow{(a \cap b')(a' \cap b)}$는

> 직선 x가 직선 a와 b'의 교점과 직선 a'과 b의 교점을 잇는 직선이다.

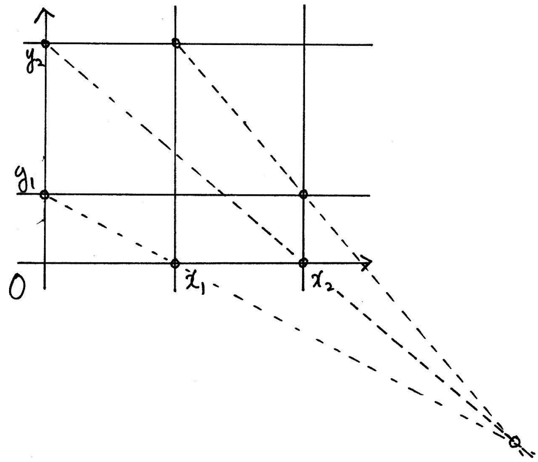
라는 뜻이다. 이것이

> 점 P가 점 A와 B'을 잇는 직선과 점 A'과 B를 잇는 직선의 교점이다.

라는 사실과 쌍대됨을 알아보면 된다. 이제 정리 4.4.2를 직접 증명하려고 한다. 이를 증명하면 이의 쌍대 명제인 Pappus의 정리를 증명한 것이 된다.

이제 직선 PP'이 무한원점들의 직선이라고 가정하자. 즉 이 그림을 캔버스라고 생각하고 직선 PP'이 지평선은 이루고 있다고 생각한다. 그러면 실제로는 세 직선 a, b, c는 서로 평행하다. 또, 세 직선 a', b', c'도 서로 평행하다.

적절한 선형변환을 통하여 이 두 직선군의 교점 가운데 하나가 원점이고 이 두 직선군은 각각 x축 및 y축과 평행하다고 하여도 된다.



그러면 직선들의 방정식이 각각 $x = 0$, $x = x_1$, $x = x_2$, $y = 0$, $y = y_1$, $y = y_2$ 라고 놓을 수 있다. 따라서 구하는 교점의 쌍들은

$$(x_1, 0), (0, y_1), \quad (x_2, 0), (0, y_2), \quad (x_2, y_1), (x_1, y_2)$$

가 된다.

문제 이 세 점을 연결한 세 직선은 한 점에서 만난다는 사실을 증명하여라.

이 문제를 풀면 증명이 끝난다. ■

문제 이 정리를 증명할 때 두 점 P와 P'이 모두 무한원 직선인 경우라고 가정하였다. 이와 비슷한 가정을 Pappus의 정리에서 해 보자. 즉 정리의 두 직선 l과 l'이 만나는 점이 무한원점이라고 가정하자. 이 말은 유클리드 평면에서 이 두 직선이 평행하다는 말이다. 이런 가정 하에서 Pappus의 정리를 증명하여 보아라.

Desargues의 정리의 쌍대 정리

그러면 맨 처음에 증명한 Desargues의 정리는 어떠한 쌍대 정리를 갖는가? 이를 알아보려면 이 정리를 풀어서 다음과 같이 적자.

정리 4.4.3 (데자르그의 정리 다시). 삼각형 $\triangle ABC$와 $\triangle A'B'C'$가 있다. 이 때 세 직선 $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$이 한 점에서 만나면,

$$P = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}, \quad Q = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}, \quad R = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$$

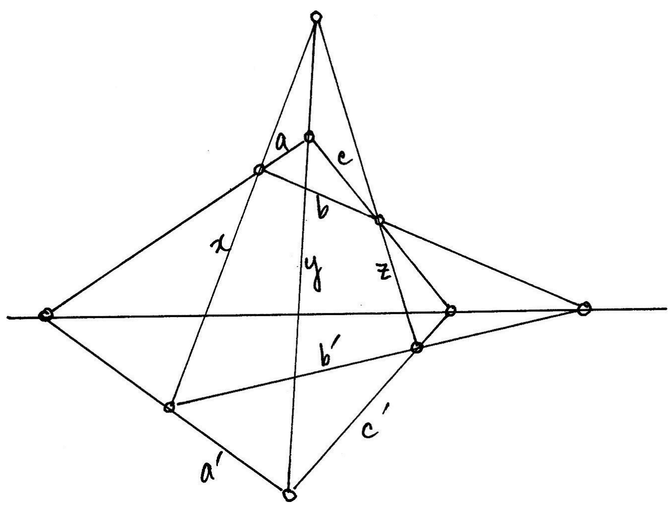
은 한 직선 위에 놓인다.

이 정리의 쌍대 형태를 적어나가자.

정리 4.4.4 (데자르그의 정리의 쌍대 정리). 세 변이 각각 a, b, c와 a', b', c'인 두 삼각형이 있다. 이 때 세 점 $(a \cap a')$, $(b \cap b')$, $(c \cap c')$이 한 직선 l 위에 놓이면, 세 직선

$$x = \overleftrightarrow{(a \cap b)(a' \cap b')}, \quad y = \overleftrightarrow{(a \cap c)(a' \cap c')}, \quad z = \overleftrightarrow{(b \cap c)(b' \cap c')}$$

은 한 점을 지난다.



이제 이것을 그림으로 그려 보면 위와 같다. 이 그림에서 곧바로 Desargues의 정리의 역(converse)임을 알 수 있다.

Desargues의 정리는 그 쌍대 정리가 자신의 역이 되는 특별한 정리이다. 따라서 Desargues의 정리를 증명하면 쌍대성에 의하여 동시에 자신의 역을 증명한 것이 된다.

벡터와 선형함수의 쌍대성

앞에서 공부한 쌍대성은 점과 직선 사이의 쌍대성이며 동시에 점을 나타내는 $\mathbb{R}^3$의 벡터와 상수항이 없는 $\mathbb{R}^3$의 선형함수 의 쌍대성이기도 하였다.

이러한 쌍대성은 점과 직선의 역할을 바꾸고 동차좌표에서 점의 좌표 (a, b, c)와 직선의 좌표 (u, v, w) 사이에도 쌍대성이 있음을 알게 해 준다. 즉 함수 $au+bv+cw$는 (u, v, w)를 변수로 보면 벡터의 일차함수이지만, (a, b, c)를 변수로 보면 일차함수(직선)의 일차함수이다. 즉 일차함수는 벡터의 일차함수일 뿐만 아니라 벡터는 일차함수들의 일차함수라고 할 수 있다.

이러한 생각을 선형기하로 확장하여 보면 우리가 공부한 벡터의 선형기하는 다음과 같은 쌍대성을 가지고 있다. 간단히 도표로 나타내자.

벡터	선형함수
모든 벡터는 세 벡터 $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$와 $\mathbf{k} = (0,0,1)$의 일차결합으로 표시된다. 즉, $(u,v,w) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$이다.	모든 1차함수는 세 좌표함수의 일차결합으로 표시된다. 즉 $ax + by + cz$는 세 함수 x, y, z의 일차결합이다.
세 벡터 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$는 각 1차함수의 좌표(계수)를 주는 함수이다. 무슨 말인가 하면 $f(x,y,z) = ax + by + cz$일 때 다음이 성립한다. $$f(\mathbf{i}) = f(1,0,0) = a, \ldots$$ 등등.	세 함수 x, y, z는 각 벡터(점)의 각각의 좌표를 주는 함수이다. 즉, $$x(u,v,w) = u, \ldots$$ 등등.
x축 방향의 단위벡터의 좌표는 $(1,0,0)$이다.	함수 x의 x, y, z의 일차결합으로 나타낸 좌표는 $(1,0,0)$이다.
벡터 (u,v,w)에서 1차함수 (a,b,c)의 값은 $$au + bv + cw$$ 이다.	1차함수 (a,b,c)의 벡터 (u,v,w)에서의 값은 $$ua + vb + wc$$ 이다.

이상의 비교에서 벡터와 (상수항이 없는) 1차함수[6] 사이에는 서로 쌍대적 관계가 있음을 알 수 있다. 특히 1차함수에 대하여 볼 때때좌표함수 x, y, z는 벡터에 대한 표준 basis $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$가 하는 역할을 하고 있음을 확인할 수 있다.

특히 마지막 성질에서 보면 벡터나 일차함수의 일차함수 $au+bv+cw$가 (a,b,c)와 (u,v,w)의 내적 꼴임은 중요한 사실이다. 이 내적은 (a,b,c)와 (u,v,w) 각각에 대하여 선형(1차)인 함수이고 전체적으로는 2차인 함수이다. 이런 관계를 통하여

6) 보통 상수항이 없는 1차함수를 선형범함수(linear funcional)이라고 부른다.

하나(벡터나 일차함수)가 다른 하나(일차함수나 벡터)에 (각각) 일차함수로 작용한다.

문제 동차좌표로 주어진 두 점의 좌표의 외적은 두 점을 잇는 직선의 좌표임을 보여라. 또 동차좌표로 주어진 두 직선의 좌표의 외적은 두 직선의 교점의 좌표임을 보여라.

4.4.3 대수곡선

동차다항식이란 변수$(x, y, \dots)$의 다항식으로 각 항의 차수가 모두 동일한 것이다. 이러한 동차다항식은 다음과 같은 성질을 가진다.

정리 4.4.5. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$가 차수가 d차인 동차다항식이면 다음을 만족시킨다.

$$f(tx_2, tx_2, \dots, x_n) = t^d f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

이 정리가 성립함을 확인하는 것은 어렵지 않다.

문제 차수가 d인 단항식에 대하여 위의 정리가 성립함을 보여라.

따름정리 4.4.6. $f(x_1, \dots, x_n)$이 동차다항식이라 하자. 원점이 아닌 점 $(x_1, \dots, x_n)$에서 $f(x_1, \dots, x_n) = 0$이면 원점과 $(x_1, \dots, x_n)$를 지나는 직선 위의 모든 점에서 $f = 0$이다.

대수곡선

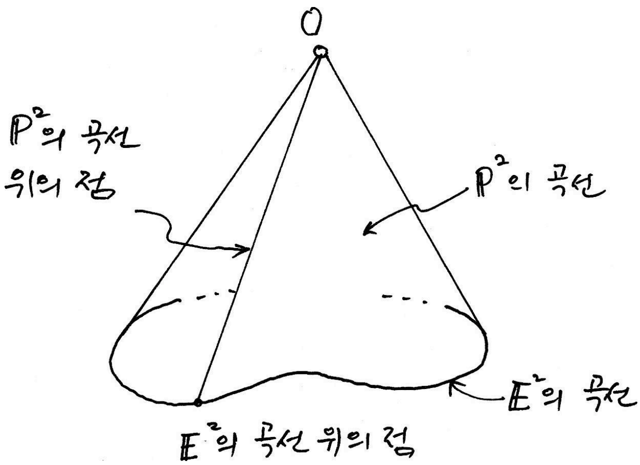
유클리드 평면의 대수곡선이라 함은 상수가 아닌 다항함수 f에 대하여 다항(대수) 방정식

$$f(x, y) = 0$$

을 만족시키는 점 $(x, y) \in \mathbb{E}^2$ 들의 집합이다. 사영 평면의 대수곡선이라 함은 동차좌표로 $(X, Y, Z) \in \mathbb{P}^2$ 인 점으로서 동차 다항(대수)방정식

$$f(X, Y, Z) = 0$$

을 만족시키는 점들의 집합이다.

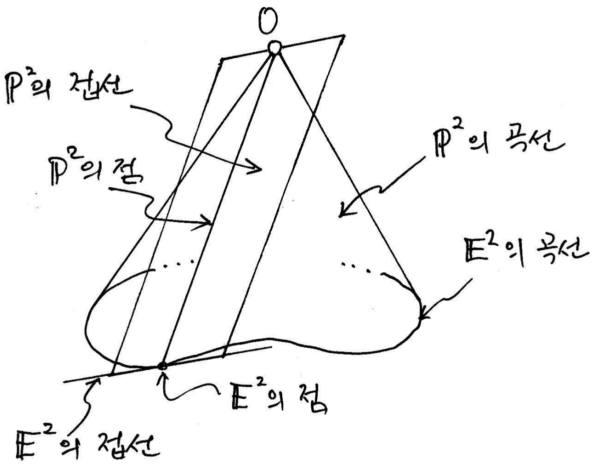


우리는 앞에서 유클리드 평면의 다항방정식은 동차좌표에 대하여 이와 동치인 동차 다항방정식으로 바꾸는 법을 알아보았다. 실제로 이것은 유클리드 평면의 대수곡선 위의 점을 원점과 연결하여 만들어진 직선들의 집합이고 이는 이 대수곡선 위에 원점을 꼭지점으로 하는 뿔(cone)을 만들어 이 위에서 원점을 지나는 직선들을 보는 것과 같다는 사실을 위 의 따름정리에서 쉽게 알아볼 수 있다.

유클리드 평면의 대수곡선은 대부분의 점에서 접선을 가진다. 다항함수 f가 주어졌을 때 f는 미분가능하므로 각 점에서 ∇f를 계산하면 $\nabla f \neq \mathbf{0}$인 점에서는 이 곡선의 법선방향을 결정한다. 따라서 이런 점에서 대수곡선은 접선을 가진다. $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$인 점 $\mathbf{p}$를 이 대수곡선의 특이점(singularity)이라고 한다. 특이점에서 대수곡선은 접선을 정의할 수 없다.

문제 유클리드 평면의 대수곡선 $\{f = 0\}$의 $\nabla f(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$인 점 $\mathbf{p}$에서 접선의 방정식을 구하여라.

이제 사영 평면의 대수곡선은 원점에서의 뿔을 보는 것과 같으므로 이 때의 접선은 동차좌표로는 유클리드 평면의 곡선의 접선과 원점을 품는 평면인 뿔의 접평면을 보는 것과 같다.



2차곡선

유클리드 평면의 2차곡선을 동차방정식을 사용해서 나타내면 사영 평면의 2차곡선이 된다. 유클리드 평면의 2차곡선은 일반적으로

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

꼴로 나타내어진다. 이 곡선은 어떤 경우에 무한원점을 지나는가?

이를 알아보기 위하여 무한원점 $(X, Y, 0)$을 지난다고 하자. 위의 방정식의 동차방정식은

$$AX^2 + BXY + CY^2 - DXZ - EYZ + FZ^2 = 0$$

이고 이것이 점 $(X, Y, 0)$를 지난다면 X, Y는

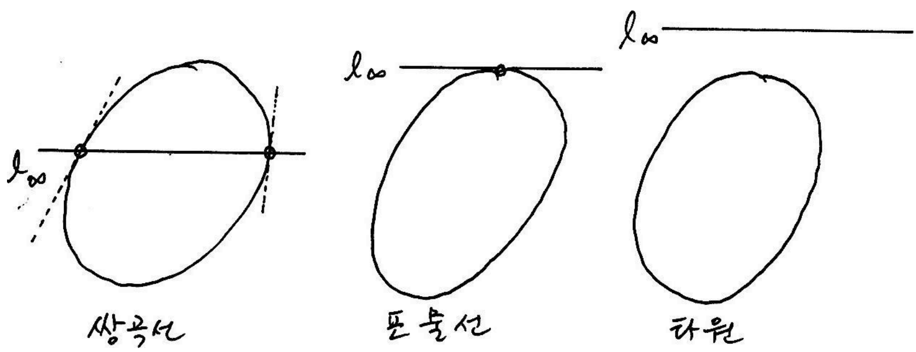
$$AX^2 + BXY + CY^2 = 0$$

을 만족시킨다 따라서

$$\frac{X}{Y} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

이 실수가 되어야 한다. 따라서 다음과 같은 세 가지 경우가 생긴다.

$B^2 - 4AC > 0$ 인 경우:	두 개의 서로 다른 무한원점을 지난다. 이 경우 유클리드 평면에서는 두 방향의 점근선을 가진다.	쌍곡선
$B^2 - 4AC = 0$ 인 경우:	하나의 무한원점에서 무한원직선에 접한다. 이 경우 유클리드 평면에서는 곡선이 한 방향으로 무한이 뻗어나간다.	포물선
$B^2 - 4AC < 0$ 인 경우:	무한원직선과 만나지 않는다. 이 경우 유클리드 평면에서 이 곡선은 유계(bounded)이다.	타원



4.4.4 쌍대곡선

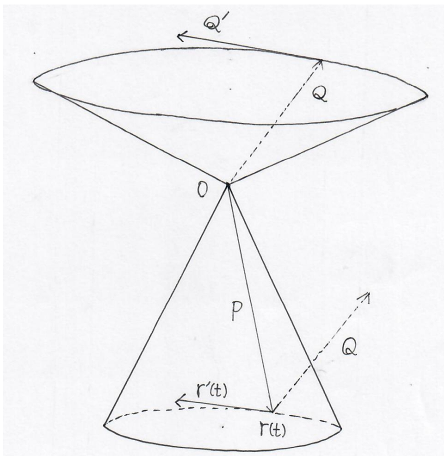
$\mathbb{P}^2$ 의 직선들을 모두 모은 공간은 쌍대성에 의해 직선을 점으로 보면 $\mathbb{P}^2$ 와 같은 모양이라고 할 수 있다. 이 공간을 $\check{\mathbb{P}}^2$ 로 잘 나타낸다. $\mathbb{P}^2$ 의 대수곡선 C 에 대하여 C 의 각 점에서의 접선들의 집합은 $\check{\mathbb{P}}^2$ 의 부분집합이 된다. 이 집합의 closure를 C 의 쌍대곡선이라 부르고 C^* 로 나타낸다. 즉,

$$C^* = \overline{\{P^* \in \check{\mathbb{P}}^2 : P^* \text{는 } C \text{의 접선이다.}\}}$$

이다. 이제 C^* 의 쌍대곡선을 생각해 보자. C^* 의 쌍대곡선의 점은 C^* 의 접선이고 이는 $\check{\mathbb{P}}^2$ 의 직선이므로 $\mathbb{P}^2$ 의 점이라고 할 수 있다. 따라서 C^* 의 쌍대곡선은 $\mathbb{P}^2$ 의 곡선이 된다.

정리 4.4.7. 쌍대곡선의 쌍대곡선은 자기 자신이 된다. 즉 $C^{**} = C$이다.

(증명) 이 정리를 증명하기 위해 C가 동차방정식으로 주어져서 $\mathbb{R}^3$에서 원점을 꼭지점으로 하는 C 위의 고깔이라고 생각하자 이 때 점 $P(\mathbb{R}^3$의 직선 $P)$에서의 접선(접평면)의 좌표(법선벡터)를 구하려고 한다. 이를 위하여 C를 $\mathbb{R}^3$의 곡선으로 나타내어 보자. 이 곡선은 고깔의 모선과 접하지 않도록 잡는다. (예를 들면 평면 $\{z = -1\}$과의 교선을 생각한다.) 이 곡선을 속력이 $\mathbf{0}$이 되지 않도록 매개변수를 써서 나타내어 $\mathbf{r}(t)$라고 하자.



그러면 $Q(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)$는 점 $P(t) = \mathbf{r}(t)$에서의 접평면의 법선벡터가 되며 동차좌표로 P^*를 나타낸다. 따라서 $Q(t)$는 쌍대곡선 고깔 C^*를 가로지르는 곡선을 매개변수로 표시한 것이다. 따라서 C^{**}에서 $Q(t)^* = P(t)^{**}$의 동차좌표는 위에서와 마찬가지로 $Q(t) \times Q'(t)$로 나타낼 수 있다. 그러면

$$Q' = (\mathbf{r} \times \mathbf{r}')' = \mathbf{r}' \times \mathbf{r}' + \mathbf{r} \times \mathbf{r}'' = \mathbf{r} \times \mathbf{r}''$$

이므로 벡터공식

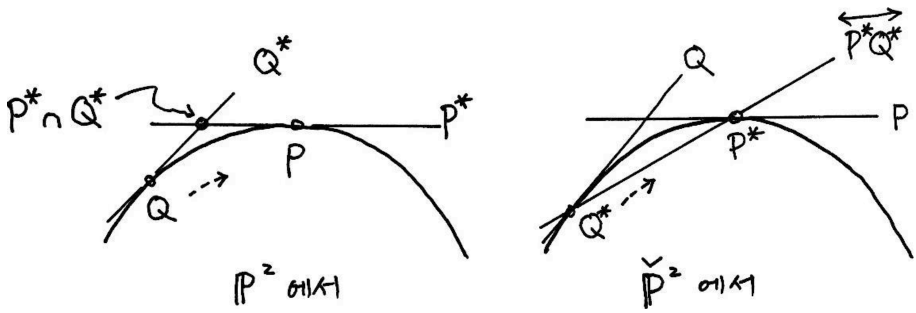
$$(A \times B) \times (C \times D) = \big(A \cdot (B \times D)\big)C - \big(A \cdot (B \times C)\big)D$$

를 써서 계산하면

$$Q \times Q' = (\mathbf{r} \times \mathbf{r}') \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}'') = \big(\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')\big)\mathbf{r}$$

이 되어 P^{**} 와 P 는 같은 동차좌표를 가짐을 알 수 있다. ■

문제 [Jennings에서] 다음 그림에서 점 Q가 곡선 C를 따라 점 P로 다가갈 때 점 Q^* 는 점 P^* 로 수렴하고 이 때 $\check{\mathbb{P}}^2$ 의 직선 P^*Q^* 는 $\mathbb{P}^2$ 의 점 P로 수렴함을 설명하여 위의 정리를 증명하여라.



정리 4.4.8. $\mathbb{P}^2$ 의 이차곡선의 쌍대곡선은 $\check{\mathbb{P}}^2$ 에서 다시 이차곡선이 된다.

우리는 이 정리를 증명하지 않는다. 대신 타원 $x^2 + 2y^2 + 2y = 1$의 쌍대곡선이 이차곡선이 됨을 알아 보고 이 정리가 왜 성립하는지를 가늠하는 것으로 대신한다.

타원 $x^2+2y^2 = 1$ 위의 한 점 (a, b)를 잡자. 그러면 이 점에서의 접선의 방정식은

$$ax + (2b+1)y = 1 - b \quad \text{즉,} \quad \frac{a}{1-b}x + \frac{2b+1}{1-b}y - 1 = 0$$

이다. 그러므로 이 접선은 좌표가

$$(\lambda, \mu) = \left(\frac{a}{1-b}, \frac{2b+1}{1-b}\right)$$

라고 할 수 있다. (a, b)는 타원의 방정식을 만족시켜야 하므로 a, b를 풀면

$$a = \frac{3\lambda}{\mu+2}, \quad b = \frac{\mu-1}{\mu+2}$$

이고 이를 방정식에 대입하면

$$1 = a^2 + 2b^2 = \left(\frac{3\lambda}{\mu+2}\right)^2 + 2\left(\frac{\mu-1}{\mu+2}\right)^2 + 2\frac{\mu-1}{\mu+2}$$

가 된다. 이 방정식을 정리하면 λ와 μ에 대한 이차방정식이다.

문제 포물선 $y^2 - 1 = 4px$의 쌍대곡선의 식을 구하여라.

4.4.5 Pascal과 Brianchon의 정리

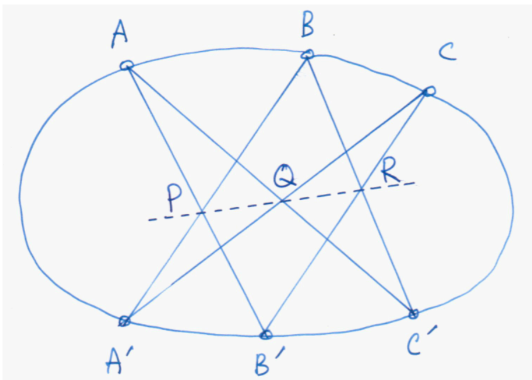
대수곡선의 쌍대곡선을 정의할 때 곡선의 접선인 직선만을 사용하였으므로 대수곡선에 대해서도 쌍대정리를 생각할 수 있다. 특히 이차곡선의 쌍대곡선은 이차곡선이므로 이차곡선과 직선에 대한 사영기하의 정리는 쌍대곡선의 정리로 이어진다.

이차곡선에 대한 가장 대표적인 정리는 Pascal의 정리이다.

정리 4.4.9 (Pascal). 이차곡선 위의 6개의 점 A, B, C, A', B', C'에 대하여

$$P = \overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B}, \quad Q = \overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C}, \quad R = \overleftrightarrow{BC'} \cap \overleftrightarrow{B'C}$$

라 하면 세 점 P, Q, R은 공선점이다.



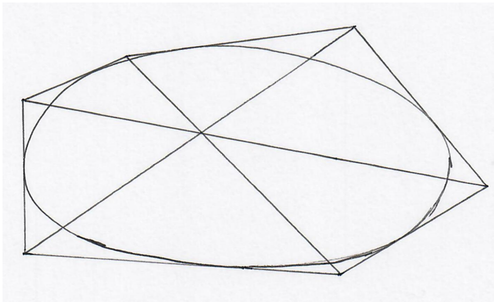
문제 이 정리의 증명에 대하여 인터넷의 http://wikipedia.org를 찾아서 적어도 두 가지의 증명을 알아볼 것.

파스칼의 정리의 쌍대 정리는 다음과 같다. 우리는 쌍대 정리를 증명하여 파스칼의 정리를 증명한다.

정리 4.4.10 (Brianchon). 이차곡선 위의 6개의 점 에서의 접선 a, b, c, a', b', c'에 대하여

$$a \cap b' = A,\ a' \cap b = A',\ b \cap c' = B,\ b' \cap c = B',\ c \cap a' = C,\ c' \cap a = C'$$

라 할 때, 세 직선 AA', BB', BB' 은 한 점에서 만난다.



(증명) 모든 이차곡선은 적절한 사영변환에 의하여 원으로 변환할 수 있다. 따라서 우리의 이차곡선이 원이라고 가정하여도 된다. 이제 이차곡선의 여섯 점의 좌표를 동차좌표로 $(\cos x_i, \sin x_i, -1)$ $(i = 0, \ldots, 5)$라고 하자. 이 각 점에서의 접선의 좌표는 $(\cos x_i, \sin x_i, 1)$ $(i = 0, \ldots, 5)$이 된다. 이제 이 접선의 교점, 그 교점을 잇는 직선, 그리고 그 직선의 교점을 차례로 외적을 계산하여 구한다음 마지막 교점이 일치하는가 보면 된다. 이 계산은 손으로 할 수 없을만큼 복잡하다. 그러나 컴퓨터 프로그램을 쓰면 간단히 확인할 수 있다. 다음 쪽의 내용은 Mathematica 를 사용하여 이 계산을 확인한 내용이다. ■

문제 다음과 같이 하여 모든 2차곡선을 사영변환에 의하여 원으로 변환할 수 있음을 설명하여라.

1. 모든 2차곡선을 투영에 의하여 타원으로 변환할 수 있음을 보여라.
2. 모든 타원은 중심투영을 통하여 원으로 변환할 수 있음을 계산을 하지 말고 설명하여라. (힌트: 원뿔을 평면으로 자르는 그림에서 중간값 정리를 이용하여라.)

Brianchon 컴퓨터로 해보기

Brianchon의 정리를 쉽게(?) 증명하기

원의 경우

김영욱 (20080902)

사영기하를 사용한 계산

복잡한 함수 값을 간단한 기호로 대체한다.(꼭 필요한 것은 아님)

```
s0 = Sin[x0]; c0 = Cos[x0]; s1 = Sin[x1]; c1 = Cos[x1]; s2 = Sin[x2]; c2 = Cos[x2];
s3 = Sin[x3]; c3 = Cos[x3]; s4 = Sin[x4]; c4 = Cos[x4]; s5 = Sin[x5];
c5 = Cos[x5];
```

여섯 쌍의 접선의 좌표를 구한다.

```
xa = Cross[{c0, s0, 1}, {c4, s4, 1}];
xb = Cross[{c1, s1, 1}, {c5, s5, 1}];
xc = Cross[{c2, s2, 1}, {c3, s3, 1}];
xaa = Cross[{c3, s3, 1}, {c1, s1, 1}];
xbb = Cross[{c4, s4, 1}, {c2, s2, 1}];
xcc = Cross[{c5, s5, 1}, {c0, s0, 1}];
```

세 쌍의 마주보는 교점을 이은 직선의 좌표를 구한다.

```
xx0 = Cross[xa, xaa];
xx1 = Cross[xb, xbb];
xx2 = Cross[xc, xcc];
```

세 쌍의 직선의 교점의 좌표를 구한다.

```
y0 = Cross[xx0, xx1] // Simplify
```

$$\Big\{8\Big(-\mathrm{Cos}\Big[\tfrac{1}{2}(x0-x1-x2-x3+x4-x5)\Big]-\mathrm{Cos}\Big[\tfrac{1}{2}(x0-x1+x2+x3+x4-x5)\Big]+\mathrm{Cos}\Big[\tfrac{1}{2}(x0-x1-x2-x3-x4+x5)\Big]+\mathrm{Cos}\Big[\tfrac{1}{2}(x0+x1-x2+x3-x4+x5)\Big]-\mathrm{Cos}\Big[\tfrac{1}{2}(x0+x1-x2-x3+x4+x5)\Big]+\mathrm{Cos}\Big[\tfrac{1}{2}(x0-x1+x2-x3+x4+x5)\Big]\Big)\mathrm{Sin}\Big[\frac{x1-x3}{2}\Big]\mathrm{Sin}\Big[\frac{x0-x4}{2}\Big]\mathrm{Sin}\Big[\frac{x1-x4}{2}\Big]\mathrm{Sin}\Big[\frac{x2-x4}{2}\Big]\mathrm{Sin}\Big[\frac{x1-x5}{2}\Big],$$

$$8\,\mathrm{Sin}\Big[\frac{x1-x3}{2}\Big]\mathrm{Sin}\Big[\frac{x0-x4}{2}\Big]\mathrm{Sin}\Big[\frac{x1-x4}{2}\Big]\mathrm{Sin}\Big[\frac{x2-x4}{2}\Big]\mathrm{Sin}\Big[\frac{x1-x5}{2}\Big]\Big(\mathrm{Sin}\Big[\tfrac{1}{2}(x0-x1-x2-x3+x4-x5)\Big]-\mathrm{Sin}\Big[\tfrac{1}{2}(x0-x1+x2+x3+x4-x5)\Big]-\mathrm{Sin}\Big[\tfrac{1}{2}(x0-x1-x2-x3-x4+x5)\Big]+\mathrm{Sin}\Big[\tfrac{1}{2}(x0+x1-x2+x3-x4+x5)\Big]-\mathrm{Sin}\Big[\tfrac{1}{2}(x0+x1-x2-x3+x4+x5)\Big]+\mathrm{Sin}\Big[\tfrac{1}{2}(x0-x1+x2-x3+x4+x5)\Big]\Big),$$

$$-8\Big(\mathrm{Cos}\Big[\tfrac{1}{2}(x0+x1-x2+x3-x4-x5)\Big]-\mathrm{Cos}\Big[\tfrac{1}{2}(x0-x1+x2+x3-x4-x5)\Big]-\mathrm{Cos}\Big[\tfrac{1}{2}(x0+x1-x2-x3+x4-x5)\Big]-\mathrm{Cos}\Big[\tfrac{1}{2}(x0-x1-x2+x3+x4-x5)\Big]+\mathrm{Cos}\Big[\tfrac{1}{2}(x0-x1+x2-x3-x4+x5)\Big]+\mathrm{Cos}\Big[\tfrac{1}{2}(x0-x1-x2+x3-x4+x5)\Big]\Big)\mathrm{Sin}\Big[\frac{x1-x3}{2}\Big]\mathrm{Sin}\Big[\frac{x0-x4}{2}\Big]\mathrm{Sin}\Big[\frac{x1-x4}{2}\Big]\mathrm{Sin}\Big[\frac{x2-x4}{2}\Big]\mathrm{Sin}\Big[\frac{x1-x5}{2}\Big]\Big\}$$

```
y1 = Cross[xx0, xx2] // Simplify;
```

이 두 좌표는 평행한가?

```
Cross[y0, y1]
```

```
{0, 0, 0}
```

부록

1. 행렬과 선형대수

행렬과 선형대수

이 절의 목표

1. basis라는 개념을 알아본다.
2. $\mathbb{R}^2$의 basis를 하나 잡자. 벡터를 이 basis의 일차결합으로 나타날 때 계수는 어떻게 계산하는가 알아본다.
3. $\mathbb{R}^2$의 벡터에 행렬을 곱하는 것은 1차함수임을 알아보고 basis를 달리 잡을 때 이 basis에 대한 좌표에 대하여는 어떤 행렬을 곱하는 것과 같은가? 이 행렬을 구하는 방법을 알아본다.
4. 2차함수가 있을 때 이 함수의 기하학적 특성을 잘 나타내는 좌표를 찾는 방법을 알아본다.
5. 2차함수의 최대 최소 문제를 풀고 그 특성을 알아본다.
6. 1차함수/변환이 공간을 어떻게 움직이는지를 잘 설명해주는 특이값 분해 singular value decomposition이 어떻게 구성되고 활용될 수 있는지를 알아본다.

들어가기

고등학교 때 행렬과 행렬식의 계산법을 공부하였다. 행렬의 계산은 복잡한 듯 하지만 매우 유용한 계산법이어서 여러 곳에서 나타난다. 단순한 문제에서는 고등학교 때의 행렬 계산법으로도 충분하지만, 조금만 복잡한 문제에 닥치면 이로는 충분하지 않다. 좌표의 방향을 바꾸고 좌표의 scale을 늘이거나 줄이면 어떻게 계산하여야 하는가 하는 것은 많은 문제를 해결하는데 필요한 기법이다. 한편, 변수가 2개 이상인 2차함수를 다루려면 고등학교의 계산법보다 고차원적인 계산 기법을 동원하여야 한다.

이 절에서는 단순히 $\mathbb{R}^2$ 에서의 1차함수와 2차함수를 다루는 법을 알아본다. 벡터는 **x**, **y**와 같이 bold체를 사용한다. 벡터는 될 수 있으면 열벡터를 사용한다.

1 Basis란 무엇인가?

평면 $\mathbb{R}^2$ 에서 서로 방향이 다른 0이 아닌 두 벡터를 잡았을 때, 이 두 벡터를 $\mathbb{R}^2$ 의 basis라고 한다. 여기서 서로 방향이 다르다는 것은 이 두 벡터 가운데 하나가 다른 하나의 실수배가 되지 않는다는 뜻이다.

이런 두 벡터는 어떤 점이 좋은가? 이런 두 벡터를 가지고 있으면 평면의 모든 벡터를 이 두 벡터를 가지고 상수배와 덧셈으로 표현할 수 있다. 뿐만 아니라 이렇게 표현하는 방법은 단 한 가지씩뿐이다.

예를 들어보자. 평면의 두 벡터 $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$를 잡으면 이 두 벡터는 서로 수직이어서 이 가운데 하나의 실수배를 하여 다른 하나를 만들 수 없다. 이 두 벡터는 0벡터가 아니므로 평면의 basis를 이룬다고 할 수 있다. 이제 평면의 임의의 벡터 $\mathbf{x} = (x, y)$를 잡으면

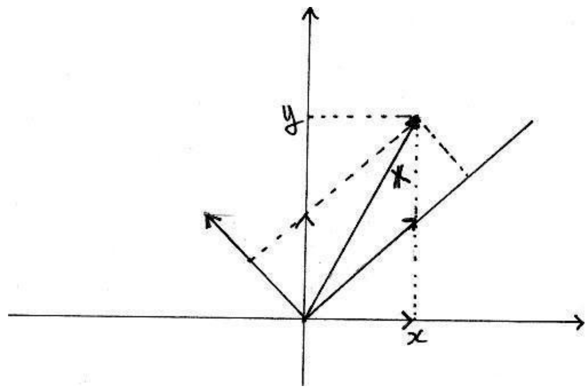
$$\mathbf{x} = x(1, 0) + y(0, 1) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

라고 쓸 수 있다. 이 때, x, y를 basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$에 대한 계수 또는 좌표라고 한다. 이렇게 두 벡터 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$에 계수 x, y를 곱해서 더한 것을 이 두 벡터의 일차결합이라고 부른다. 또, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$는 standard basis라고 부른다.

그러면 basis를 $\mathbf{w}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{w}_2 = (-1, 1)$이라고 잡으면 어떤가? 간단한 계산을 통해

$$(x, y) = \frac{x+y}{2}(1, 1) + \frac{-x+y}{2}(-1, 1) = \frac{x+y}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{-x+y}{2}\mathbf{e}_2$$

임을 알 수 있다. 따라서 이 새 basis에 대한 좌표는 $(\frac{x+y}{2}, \frac{-x+y}{2})$가 된다.



문제 0벡터가 아닌 두 벡터 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$를 잡을 때, 이 두 벡터가 평행하기 위한 필요충분조건은 이 두 벡터로 만든 행렬의 행렬식이 0이라는 것임을 보여라.

2 Basis 변환

우선 여기서는 $\mathbb{R}^2$의 basis를 임의로 하나 잡을 때, $\mathbb{R}^2$의 벡터를 이 basis의 일차결합으로 쓰고자 하면 그 계수를 어떻게 찾는가 하는 문제를 풀고자 한다.

임의로 잡은 basis를 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$라고 하자. 이들을 열벡터로 하는 행렬을

$$P = [\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2] = \begin{pmatrix} | & | \\ \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 \\ | & | \end{pmatrix}$$

라고 부르기로 하자. 이제 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$라고 하고, 이 벡터를 새 basis의 일차결합으로 쓴 계수 벡터를 $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^T$로 나타내기로 하면 관계식

$$\mathbf{x} = y_1\mathbf{w}_1 + y_2\mathbf{w}_2$$

가 성립한다. 이것은 간단히

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y}$$

라고 쓰면 편하다. 즉,

$P\mathbf{y}$는 P의 열벡터를 $\mathbf{y}$를 계수로 일차결합을 만든 것이다.

P는 역행렬을 가지는 행렬이므로

$$\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$$

가 된다. 그러니까 우리 공식은 이렇다.

basis 벡터를 열벡터로 가지는 행렬의 역행렬을 $\mathbf{x}$에 곱하면 이 basis에 대한 $\mathbf{x}$의 계수를 찾을 수 있다. 특히 어떤 basis를 잡아도 모든 벡터를 이 basis의 일차결합으로 쓸 수 있다.

반대로 basis $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$의 일차결합의 계수가 $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^T$일 때 이 벡터는 무엇인가? 즉, standard basis로 나타내면 어떻게 되나 하는 답은 $P\mathbf{y}$이었다. 즉, standard basis와 새 basis에 대한 계수들은 서로 P와 P^{-1}를 곱해서 계산할 수 있다.

문제 여기서 $\mathbf{w}_1 = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$, $\mathbf{w}_2 = c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2$로 나타낼 때 계수의 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$를 P로 나타내어라. 또, $\mathbf{e}_1 = a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2$, $\mathbf{e}_2 = c\mathbf{w}_1 + d\mathbf{w}_2$로 나타낼 때 계수의 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$를 P로 나타내어라.

3 행렬을 곱할 때는?

문제는 $\mathbb{R}^2$의 벡터에 행렬 A를 곱할 때, 그 결과를 standard basis가 아닌 다른 basis에 대한 좌표의 입장에서 볼 때는 어떤 행렬을 곱하는 것이라고 보이는가 하는 것이다.

즉, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$이라고 하자. 이 벡터에 행렬 A를 왼쪽에 곱하면 $A\mathbf{x}$가 된다. 이제, 다른 basis $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$를 생각하자. 그러면

$$\mathbf{x} = y_1\mathbf{w}_1 + y_2\mathbf{w}_2 = P\mathbf{y}$$

이다.

이제 $A\mathbf{x}$를 $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$에 대한 일차결합으로 쓰면 어떻게 되나 생각해 보자. 즉,

$$P\mathbf{z} = z_1\mathbf{w}_1 + z_2\mathbf{w}_2 = A\mathbf{x}$$

인 $\mathbf{z}$를 찾자. 이제

$$P\mathbf{z} = A\mathbf{x} = AP\mathbf{y}$$

를 풀어보면

$$\mathbf{z} = P^{-1}AP\mathbf{y}$$

를 얻게 된다. 즉, basis $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$에 대한 계수가 $\mathbf{y}$인 벡터 $\mathbf{x}$에 A를 곱하여 얻은 벡터를 다시 $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$의 일차결합으로 나타낼 때의 계수 $\mathbf{z}$는 $P^{-1}AP\mathbf{y}$ 가 된다는 말이다.

다시 말하면 A를 곱하는 것은 basis $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$에 대한 계수벡터의 입장에서 보면 $P^{-1}AP$를 곱하는 것과 같다는 뜻이다. 이것을 그림으로 나타내면 다음과 같다.[7]

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{x}(= P\mathbf{y}) & \longrightarrow & A\mathbf{x}(= AP\mathbf{y}) \\ \big\uparrow & & \big\downarrow \\ \mathbf{y} & \longrightarrow & P^{-1}AP\mathbf{y} \end{array}$$

그래서 주어진 행렬 A에 대하여 행렬의 변형 $P^{-1}AP$는 중요한 의미를 가진다. 이렇게 변형된 행렬 $P^{-1}AP$는 원래의 A와 서로 similar하다고 한다.[8]

문제 $\mathbb{R}^2$에서 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$에 의한 (왼쪽에의) 곱셈은 basis를 $(1, 1)^T$, $(-1, 1)^T$으로 잡을 때의 새 좌표로 보면 어떤 행렬에 의한 곱셈인가?

4 2차식을 생각해 보자

다음과 같은 방정식이 주어져 있다고 하자:

$$x^2 + 2xy + 2y^2 = 1.$$

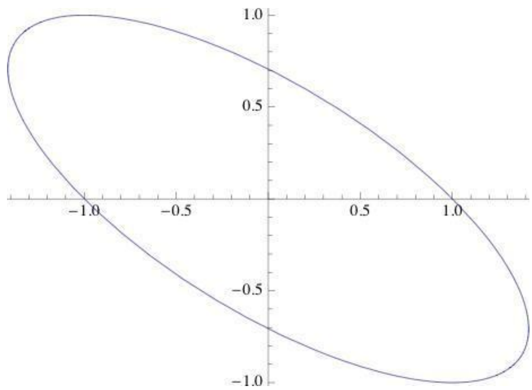
7) 위로 올라갈 때는 P를 곱하고 아래로 내려올 때는 P^{-1}를 곱한다는 것을 주의해서 볼 것.
8) similar는 닮은꼴이라는 말이지만 사실 모양이 똑같다고 하는 것이 옳을 것 같다.

이 방정식이 그리는 도형은 어떻게 생겼나?

이 질문에 답을 하려고 하면 이 도형의 모양을 알아내야 한다. 우리가 고등학교에서 배운 방법을 적용하면 이 방정식을

$$(x+y)^2 + y^2 = 1$$

이라고 바꾸어 쓸 수 있다. 여기서 $X = x+y$, $Y = y$라고 부르기로 하면 이 방정식은 $X^2 + Y^2 = 1$이 된다. 그러니까 이 새 좌표 X, Y에 대하여 이 도형은 원이다.



이 말은 틀린 말은 아니다. 그러나 이 새 좌표 (X,Y)는 원래 좌표 (x,y)와는 상당히 다른 좌표여서 새 좌표에서 원이라는 것만 가지고는 원래 좌표에서 어떤 도형인지 말하기가 어렵다.

문제 이 그림에서 X-축과 Y-축을 찾아서 위의 식과 그림을 맞추어 보아라. 그리고 이 타원이 좌표축과 절편에 대하여 어떠한 조건으로 그려질 수 있는지도 생각해 보아라. 이를 통해서 직교좌표를 사용하지 않는 것이 얼마나 어려운지에 대하여 느껴보자.

실제로 이러한 변환에 의하여

$$\begin{aligned} (X,Y) = (1,0) \quad &\mapsto \quad (x,y) = (1,0) \\ (X,Y) = (0,1) \quad &\mapsto \quad (x,y) = (-1,1) \end{aligned}$$

로 대응되므로 원점에서부터의 거리는 두 좌표계에서 다르게 보인다. 그러니까 이런식으로 방정식을 변형하는 것은 도형의 입장에서는 별로 좋지 않다. 그러면 어떻게 변형하면 좋은가?

적어도 선분의 길이나 각이 변하면 안 된다. 그러니까 적어도

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{X^2+Y^2}$$

은 되도록 변형해야 한다. 어떤 변형이라야 하는가?

이제 앞절에서 공부한 내용을 적용해 보자. standard basis로 좌표가 $\mathbf{x} = (x,y)^T$인 벡터를 새 basis $P = [\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2]$를 써서 새 좌표 $\mathbf{y} = (X,Y)^T$로 고치면 그 결과는 $P\mathbf{y} = \mathbf{x}$이다.

이제 길이가 같다는 위의 조건을 써 보자. 그런데 길이는 square root가 있어서 복잡하다. 이럴 때는 그냥 길이의 제곱이 같다고 해도 된다. $\mathbf{y}$의 자기 자신과의 내적은 $\mathbf{y}^T\mathbf{y}$이니까 위의 조건을 식으로 써 보면

$$\mathbf{y}^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = (P\mathbf{y})^T P\mathbf{y} = \mathbf{y}^T P^T P\mathbf{y}$$

가 모든 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$에 대하여 성립한다. 그러려면 P^TP는 어떤 행렬이어야 하는가?

대충 짚어보면 P^TP가 단위행렬이면 된다. 그러니까 P^TP가 단위행렬이 아닌 경우도 되는가 하는 것이 궁금하다. 이를 풀기 위하여 알아야 할 것이 하나 있다. 무엇인고 하면

$$(P^TP)^T = P^T(P^T)^T = P^TP$$

가 성립한다는 것이다. 무슨 말인가 하면 행렬 P^TP는 전치(transpose)를 하여도 변하지 않는 대칭행렬이라는 말이다.

이제 $\mathbf{y}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T(P^TP)\mathbf{y}$라는 식에서, $P^TP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$라 놓고 $\mathbf{y}$에 $(1,0)^T$를 넣어 보자. 금방 $\alpha = 1$이라는 것을 알 수 있다. 마찬가지로 $\mathbf{y}$에 $(0,1)^T$를 넣어 보면 $\gamma = 1$이 되어야 한다. 마지막으로 $\mathbf{y}$에 $(1,1)^T$를 넣어보면 $\beta = 0$이 되지 않으면 안 되고, 따라서 $P^TP = I$라는 것을 알 수 있다.

그러면 이 조건은 무엇인가 알아 보자. $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라고 다시 써 보면 이 조건

은

$$I = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$

이 되니까, 다시 쓰면

$$a^2+c^2 = b^2+d^2 = 1, \quad ab+cd = 0$$

이 되고, 이 말은 벡터 (a,c), (b,d)가 서로 수직이고 각각 길이가 1이라는 말이 된다. 즉 P의 열벡터가 서로 수직인 단위벡터라는 뜻이다. 이 때, P를 직교행렬 (orthogonal matrix)라고 부른다.[9)]

문제 위의 조건을 만족시키는 a,b,c,d는 다음도 만족시킴을 보여라.

$$a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1, \quad ac+bd = 0$$

5 P는 어떤 행렬인가?

이제 P의 열벡터를 $\mathbf{w}_1 = (a,c)^T$, $\mathbf{w}_2 = (b,d)^T$라 놓으면 새 좌표는 $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$를 basis로 하는 좌표여야 함을 알 수 있다. 이제 이 벡터들을 어떻게 찾는가? 이제 원래의 문제로 돌아가 보자. 원래 우리가 다루려고 하는 2차식은 $x^2+2xy+2y^2$이고 이것을 사용하기 좋게 변형하여야 한다. 아까의 계산을 보고 얻은 아이디어는 이 식을

$$x^2+2xy+2y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

라고 써 보는 것이다. 여기서 주의할 사항은 이 행렬을 대칭행렬로 적었다는 것이다.

문제 모든 2차식 $ax^2+2bxy+cy^2$은 대칭행렬을 사용하여 다음과 같이 표현할 수 있음을 보여라.

$$ax^2+2bxy+cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

---

9) 서로 수직인 단위벡터를 basis로 사용할 때 orthonormal basis라고 부른다.

이제 이렇게 나타낸 식에 새 좌표를 적용하여 보자. 그러면

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (P\mathbf{y})^T A(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T P^T AP\mathbf{y}$$
$$= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = aX^2 + 2bXY + cY^2$$

이 된다. 여기서 가능하면 우변에서 $b = 0$이 되어서 이 식의 모양이 $aX^2 + cY^2$이 되었으면 좋겠다는 것을 알 수 있다. 그러면 방정식이 $aX^2 + cY^2 = 1$이 되어서 고등학교에서 공부한 꼴이 된다. 이러한 꼴은 위의 2차방정식의 표준형이라고 한다. 이것이 가능한가? 어떤 $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$를 잡으면 되는가?

이제 이렇게 될 조건을 써 보자. 이것은 위의 식에서

$$P^T AP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

가 되어야 한다. 그런데 앞 절에서 $P^T = P^{-1}$ 되도록 잡아야 한다는 것을 알고 있다. (즉, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$가 orthonormal basis를 이루어야 한다.) 그러니까 이 조건은 다시 쓰면

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{즉,} \quad AP = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

가 되어서

$$\begin{pmatrix} A\mathbf{w}_1 & A\mathbf{w}_2 \end{pmatrix} = AP = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\mathbf{w}_1 & c\mathbf{w}_2 \end{pmatrix}$$

라는 조건과 같다. 즉, $A\mathbf{w}_1 = a\mathbf{w}_1$이 되어야 하고, 또 $A\mathbf{w}_2 = c\mathbf{w}_2$가 되어야 한다. 이런 벡터를 어떻게 찾는가?

이렇게 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$를 만족시키는 0이 아닌 벡터 $\mathbf{x}$를 A의 eigenvector라고 부르고 그 때 곱해지는 실수 λ를 이 행렬의 eigenvalue라고 한다. 잘 알려진 사실은 행렬 A가 대칭이면 이 행렬의 eigenvector만 가지고 orthonormal basis를 만들 수 있다는 것이다. 따라서 모든 2차식은 표준형으로 고칠 수 있다. 여기서 orthonormal인 eigenvector 방향을 이 2차식의 축(axis) 또는 주축(principal axis)이라고 부른다.

이 문제를 풀기 위해 이 조건을 $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$이라고 바꾸어 쓰고 보자. 이 말은 행렬 $A - \lambda I$의 두 행벡터가 모두 $\mathbf{x}$와 수직이라는 뜻이고, 따라서 두 행벡터는 서로 평행해야 한다. 따라서 이 행렬의 행렬식은 0이 되지 않으면 안 된다. 그러니까

$\boxed{\lambda\text{는 방정식 } \det(A - \lambda I) = 0 \text{을 만족시킨다.}}$

방정식 $\det(A - \lambda I) = 0$을 A의 특성방정식 (characteristic equation) 이라고 한다. 이제 우리 경우에 계산하여 보면

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 1$$

이므로 이를 풀면

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

이고, 이 때, 단위벡터 $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ 도 구할 수 있다. 그리고, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ 에 대한 새로운 좌표에 대하여 위의 방정식은

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} X^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} Y^2 = 1$$

과 같은 꼴로 쓰여짐을 알 수 있다.

문제 방정식 $2xy = 1$을 표준형으로 고치고 이 때 basis $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ 를 구하여라.

6 2차함수의 최대 최소 문제

다음과 같은 문제를 생각해 보자.

(문제) 원 $x^2+y^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$에서 2차식 $x^2+2xy+2y^2 = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$의 최대최소값을 구하여라.

이 문제를 풀기 위하여 우리는 적절히 좌표변환을 해서 이 이차식의 mixed term(xy항) 이 나타나지 않도록 바꾸고 싶다. 이 때 조건식 $x^2 + y^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$이 변하면 안 된다. 이 조건식이 변치 않으려면 좌표변환을 직교행렬 P로 하면 된다. 그 이유는 조건식이

$$1 = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = (P\mathbf{y})^T P\mathbf{y} = \mathbf{y}^T P^T P\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{y}$$

로 변환되어 바뀌지 않기 때문이다. 앞 절의 계산에서 우리는 적절한 직교행렬 P에 대하여

$$P^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

로 변형된다는 것을 알고 있다. 여기서 $\lambda, \mu = (3 \pm \sqrt{5})/2$이다. 따라서 문제는 다음과 같이 변한다.

(문제)′ 원 $X^2 + Y^2 = \mathbf{y}^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$에서 2차식 $\lambda X^2 + \mu Y^2 = \mathbf{y}^T \mathrm{P}^T \mathrm{AP}\mathbf{y}$의 최대최소값을 구하여라.

이 문제의 답은 λ와 μ이다.

문제 이 문제에서 $\lambda X^2 + \mu Y^2$의 최대최소값을 구하여라.

문제 $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$일 때, $x^2 + y^2$의 최대최소값을 구하여라.

7 행렬의 특이값 (Singular Values)

행렬과 벡터는 오랜 동안 우리 주위에서 중요한 역할을 하고 있으며 특히 사회과학과 관련하여 여러 가지로 응용되고 있다. 이 가운데서 수학과 교육과정에서는 별로 다뤄지지 않고 있지만 현실에서는 매우 중요하게 활용되고 있는 주제로 특이값 분해(singular value decomposition)이라는 것이 있다. 실제로 행렬의 이론에서 1차함수(선형변환) 부분의 기하학적 핵심을 설명해 주는 이론임에도 이것이 간과되고 죠르당 형식의 표현만이 사용되는 것은 2차함수에 대한 고유값 이론쪽으로 너무 경도된 것이다. 여기서는 잘 알려져 있는 특이값의 성질과 기하, 그리고 이것이 전치행렬의 기하학적 구조에 대하여 설명해주는 사실 및 이를 활용한 통계학의 주성분분석(principal component analysis) 등에 대하여 간단히 소개해 둔다. 이 개설논문의 내용은 주로 Gilbert Strang의 교과서 [2]를 참조하였다.

행렬 계산에서 꼭 알아야 하는 사실

다음 행렬을 생각해 보자: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

이 행렬을 벡터에 곱해서 선형변환으로 생각할 때, 즉 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$에 대해서 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$라는 함수를 생각할 때 이 함수는 어떤 함수인가? 가장 먼저 떠오르는 것은 다음 관계식이다:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{이고} \quad \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad \text{이다.}$$

그러니까 거꾸로 $\mathbf{R}^n$에서 $\mathbf{R}^m$으로의 선형변환이 있을 때 이의 행렬을 알아내는 방법은 이 변환이 standard basis $\mathbf{e}_i$들을 어디로 보내는가를 알아보면 된다.[10)]

8 고유값 Eigenvalues

선형변환으로서의 행렬을 이해하는 데는 꼭 고유값eigenvalue 개념을 써야 한다. 앞에서 공부한 고유값 개념을 간단히 정리한다. 2차형식 $ax^2 + 2bxy + cy^2$을 생각해 보자. 이 식은 간단히 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

이제 가운데 있는 대칭행렬을 A로 나타내기로 하면 간단히 $\mathbf{x}^T A\,\mathbf{x}$라고 써도 된다.[11)]

이제 이 함수(2차형식)를 이해하는 방법의 하나는 이 함수의 그래프의 등고선 즉 등위선level curve을 그려보는 방법이다. 즉 방정식

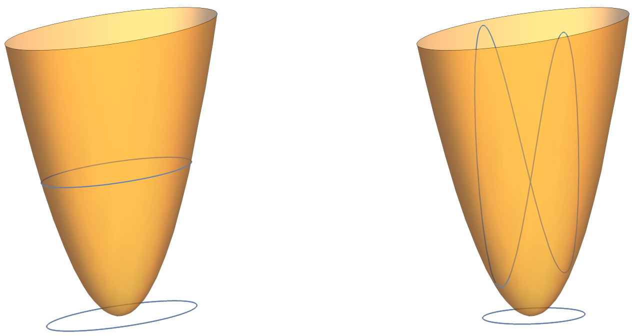
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1 \quad (\text{또는 } d)$$

---

10) 이 사실을 다시 써 보면 다음과 같고 이것은 당연하지 않은가?

$$\big[A\mathbf{e}_1, \cdots, A\mathbf{e}_n\big] = A\big[\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\big] = AI_n = A.$$

11) 선형대수를 공부할 때 $\mathbf{x}^T A\,\mathbf{x}$와 같은 식을 봐도 항상 머리 속에는 행렬로 표현된 것을 동시에 상상해야 한다. 열심히 연습해서 기호와 계산을 같이 생각할 수 있게 만들면 노력보다 훨씬 큰 상을 받는다. 대학에서 공부하는 동안에 꾸준히 해 보자.



〈그림 4.1〉 왼쪽은 타원형 포물면에서 높이가 일정한 점들의 집합과 이를 xy–평면에 등위선으로 나타낸 것. 오른쪽은 같은 포물면에서 xy–평면의 단위원으로 정사영되는 점들을 포물면 위에 나타낸 것.

의 그래프를 그려보면 된다. 이미 고등학교 때 그리고 선형대수에서 이런 곡선들은 2차곡선, 즉 타원 · 쌍곡선 · 포물선 가운데 하나가 된다고 들었다.

이것은 함수 값이 1이 되는 점들을 함수 $z = ax^2 + 2bxy + cy^2$의 그래프 위에 그리고 이것을 xy평면으로 정사영한 것이다. 이렇게 하면 이 함수의 그래프가 어느쪽으로 씰그러졌는지 알 수 있다. 그러나 이것을 반대로 할 수도 있다. 즉 $x^2 + y^2 = 1$인 점들을 이 그래프 위에서 나타내 보면 이 그래프가 어느 쪽으로 얼마나 빨리 증가하는지 봐서 판단할 수도 있다. 우리는 이 두번째 방법을 쓰기로 하자.

이런 2차형식으로 만든 방정식의 그래프를 이론적으로 이해하는 방법이 고유값이라고 생각할 수도 있다.

고유값을 계산하는 문제

우리가 푸는 문제는 위의 오른쪽 그림과 연관되어 있다.[12] 이 문제를 서술하면 다음과 같다.

> [문제] $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$ 위에서 2차형식 $\mathbf{x}^TA\,\mathbf{x}$의 최대·최소값은 어느 $\mathbf{x}$에서 이고, 그 값은 얼마인가?

그리고 이 문제는 이미 앞의 6절에서 한 번 풀어본 것이다. 여기서는 앞에서처럼 기하학적으로 푸는 대신에 Lagrange multiplier를 써서 직접 계산으로 푼다. 즉 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA\,\mathbf{x}$, $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x} - 1$이라 놓고, $\nabla f = \lambda\nabla g$와 $g = 0$이라는 방정식을 연립해서 푸는 것이다.(간단히 쓰기로 하면 $\nabla_{\mathbf{x},\lambda}(f - \lambda g) = 0$라고 할 수 있다.) f의 gradient를 계산하면

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 2A\mathbf{x}$$

이다.[13] 따라서 방정식은

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0,$$
$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} - 1 = 0.$$

이고 이 말은 λ가 A의 고유값*eigenvalue*이고 구한 벡터 $\mathbf{x} = \vec{v}$는 이 λ의 단위 고유벡터*eigenvector*라는 뜻이다. 또 이때 문제의 $\vec{v}^TA\,\vec{v}$의 최대값을 구하면

$$\vec{v}^TA\,\vec{v} = \vec{v}^T(\lambda\vec{v}) = \lambda\,\vec{v}^T\vec{v} = \lambda$$

이다. 이것이 A의 최대 고유값이 된다. 나머지 고유값 등은 지금까지 찾은 고유벡터들과 수직인 벡터들만을 대상으로 위의 문제를 다시 풀면 그 다음 고유값과 이에 해당되는 고유벡터들을 찾을 수 있다. 이렇게 해서 찾은 것들은 (A가 $n \times n$ 행렬이라 할 때)

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n, \quad \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \perp \cdots \perp \vec{v}_n$$

와 같이 된다.

---

12) 물론 이 문제는 왼쪽 그림과도 연관되어 있지만 직접은 아니고 한 다리 걸쳐서이다.

13) 참고로 1변수 함수 $f(x) = ax^2 = xax$의 gradient는 $\nabla f(x) = 2ax$이다. 다변수인 경우에도 똑같이 되는 것을 확인해 두어라. 또 여기서 $\nabla f(\mathbf{x})$는 ∇f를 $\mathbf{x}$에서 계산한 값이지 $f(\mathbf{x})$의 ∇가 아니다. 즉 f에 ∇를 적용하는 것이 먼저이고 $\mathbf{x}$를 대입하는 것이 나중이다.

스펙트럼 이론

선형대수에는 스펙트럼 성분 분석 이론*spectral theory*이 있다. 이것은 바로 2차형식을 고유벡터를 basis로 분해하는 것으로 물리학, 화학을 비롯해여 여러 분야에 다양하게 응용된다. 이 이론을 적용하면 어떤 대칭행렬에 대해서도 위와 같은 고유벡터들을 찾아서 이것들로 orthonormal basis를 만들 수 있다.

이제 고유벡터를 사용하면 위의 이차형식 $\mathbf{x}^T A\,\mathbf{x}$를 다음과 같이 쓸 수 있다. 이것은 이렇게 하면 된다: $A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$ 를 모두 모으면 행렬로 다음과 같이 표현된다.

$$A\big[\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\big] = \big[\lambda_1\vec{v}_1, \cdots, \lambda_n\vec{v}_n\big] = \big[\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\big]\,\mathrm{Diag}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$$

이것을 간단히 나타내면 $AV = VD$라고 쓸 수 있고 이 때 행렬 V는 orthogonal 이므로 역행렬 V^T를 써서 $A = VDV^T$라고 나타낼 수 있다. 이것을 A의 주축변환*principal axis transform*라고 부른다. 이 표현을 2차형식에 구체적으로 써 보자. 벡터 $\mathbf{x}$를 우리가 구한 고유벡터 basis의 일차결합으로 나타내서 성분을 구한 것을 $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$라 하면

$$\mathbf{x} = y_1\vec{v}_1 + \cdots + y_n\vec{v}_n = \big[\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\big](y_1, \ldots, y_n)^T = V\mathbf{y}$$

라고 쓸 수 있다. 따라서

$$\mathbf{x}^T A\,\mathbf{x} = (V\mathbf{y})^T V D\, V^T V\mathbf{y} = \mathbf{y}^T (V^T V) D (V^T V)\mathbf{y} = \mathbf{y}^T D\,\mathbf{y}$$

가 되므로, V를 basis로 나타낸 좌표 $\mathbf{y}$에서 보면 이 2차형식은 mixed term이 사라지고 완전제곱꼴로 표시된 표준형이 된다. 이렇게 나타낸 것을 원래 2차형식의 표준형이라 부르고, 이 표준형 2차형식의 축을 원래 2차형식의 주축*principal axis*라고 부른다. 또 이 변환은 주축변환이라고 한다.

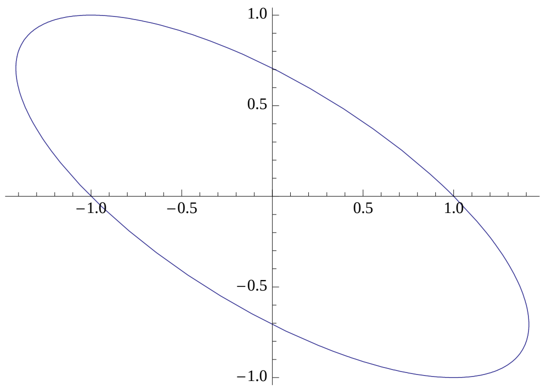
2차형식 계산의 예

다음과 같은 방정식이 주어져 있다고 하자:

$$x^2 + 2xy + 2y^2 = 1.$$

이 방정식이 그리는 도형은 어떻게 생겼나? 이 방정식을

$$(x+y)^2 + y^2 = 1$$



〈그림 4.2〉 방정식 $x^2+2xy+2y^2=1$의 그래프가 그리는 타원. 이 타원에서 장축과 서축의 길이와 방향을 알아내고 싶다.

이라고 바꾸어 쓸 수 있다. 여기서 $X = x+y$, $Y = y$라고 부르기로 하면 이 방정식은 $X^2+Y^2=1$이 된다. 그러니까 이 새 좌표 X, Y에 대하여 이 도형은 원이다.

이 말은 틀린 말은 아니다. 그러나 이 새 좌표 (X,Y)는 원래 좌표 (x,y)와는 상당히 다른 좌표여서 새 좌표에서 원이라는 것만 가지고는 원래 좌표에서 어떤 도형인지 말하기가 어렵다. [14)]

실제로 이러한 변환에 의하여

$$\begin{aligned} (X,Y)=(1,0) &\quad\mapsto\quad (x,y)=(1,0)\\ (X,Y)=(0,1) &\quad\mapsto\quad (x,y)=(-1,1) \end{aligned}$$

로 대응되므로 원점에서부터의 거리는 두 좌표계에서 다르게 보인다.

이제 고유벡터를 사용해 보자. 우리 2차형식은

$$\mathbf{x}^T A\,\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

14) 이 그림에서 X-축과 Y-축을 찾아서 위의 식과 그림을 맞추어 보아라. 그리고 이 타원이 좌표축과 절편에 대하여 어떠한 조건으로 그려질 수 있는지도 생각해 보아라. 이를 통해서 직교좌표를 사용하지 않는 것이 얼마나 어려운지에 대하여 느껴보자.

이고 이 행렬의 eigenvalue는 $\lambda_i = (3 \pm \sqrt{5})/2$ $(\lambda_1 > \lambda_2)$이다. 또 이 때의 unit eigenvector들을 각각 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, 이 두 벡터가 만드는 orthogonal 행렬을 V라고 하고, $V\mathbf{x} = \mathbf{y} = (\tilde{x}, \tilde{y})$라고 부르면 위에서의 계산이 그대로 들어맞아서 우리 방정식은

$$x^2 + 2xy + 2y^2 = \mathbf{x}^T A\, \mathbf{x} = [\tilde{x}, \tilde{y}] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 = 1$$

이 된다. 이것이 새 축(basis) $\vec{v}_1, \vec{v}_2$에 대한 좌표계 $(\tilde{x}, \tilde{y})$를 써서 완전제곱꼴로 표현된 방정식이다. 그리고 여기서의 좌표변환은 직교행렬을 썼으므로 길이와 각도를 변화시키지 않으므로 도형의 모양을 잘 유지하고 있다. 이 때 얻은 새 축들은 이 2차곡선(타원)의 주축이 된다.

9 특이값 Singular Values

앞에서는 2차함수 특히 2차형식의 기하학적 모양을 알아보기 위하여 고유값을 알아봤다. 이제 1차함수를 보자. 실변수 1차함수는 너무 쉬워서 설명할 것이 없다. 우리가 알고 싶은 것은 벡터 변수, 벡터값을 갖는 선형사상이다. 즉 행렬 A $(m \times n)$가 정하는 1차함수 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$를 생각하자. 그러면 행렬 A는 그대로 선형사상이라고 봐도 되어서 $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$인 사상으로 생각할 수 있다.

이 사상 A의 모양(!)을 잘 보려고 하면 어떻게 하는가? 예를 하나 들어 보자. 행렬 $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$는 x–축 방향은 3배 늘려서 y–축 방향에 가져다 놓고, y–축 방향은 2배로 늘려서 $-x$–축 방향에 가져다 놓는다. 그리고 전체적으로는 평면을 왼쪽으로 회전해 놓는다.

선형사상 A는 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$을 $A\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$으로 사상하는데 0벡터는 0벡터로 보내므로 중심은 흔들리지 않는다. 따라서 이 사상이 0벡터를 중심으로 어느 방향으로 벡터의 크기를 가장 많이 늘이는지 알아보고 싶다. 단지 늘어나더라도 그대로 있지 않고 위의 예처럼 다른 방향으로 방향을 바꾸게 될 것이다. 따라서 우리는 $\|\mathbf{x}\| = 1$인 벡터들 가운데서 $\|A\mathbf{x}\|$가 가장 커지는 $\mathbf{x}$와 그 방향, 그리고 그의 상 $A\mathbf{x}$와 그 방향에 관심이 있다. 이것을 찾으려면 $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$인 $\mathbf{x}$들 중에서 $\|A\mathbf{x}\|^2 = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A^T A\, \mathbf{x}$의 최대값을 찾으면 된다. 이 문제는 위에서 푼

문제이다. 단지 행렬이 A^TA로 바뀌었을 뿐이다. 그리고 행렬 A^TA는 대칭행렬이므로 선형대수의 spectral 이론이 그대로 적용되어 항상 n개의 서로 독립인 고유벡터를 찾을 수 있다.

이제 앞의 계산을 따라서 고유값과 고유벡터를 모두 찾아서 이것을

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0, \quad \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \perp \cdots \perp \vec{v}_n$$

이라고 하기로 하자. (이 문제에서는 구하는 값이 $\|A\mathbf{x}\|^2$이라서 항상 음이 아닌 값을 얻게 된다는 것과 따라서 모든 λ가 음수가 아니라는 것을 염두에 둔다.)

이제부터 0이 아닌 λ들만 보자. 이것은 A의 rank인 r개 만큼 있다.

이제 $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i}$라 놓자. 우리가 구한 $\vec{v}_i$는

$$A^TA\,\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$$

를 만족시키는 그런 단위벡터 $\vec{v}_i$이다. 그리고 $\vec{v}_i$에서

$$\|A\vec{v}_i\|^2 = \vec{v}_i^T A^TA\,\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i^T \vec{v}_i = \lambda_i \quad \text{즉,} \quad \|A\vec{v}_i\| = \sigma_i$$

가 되니까 $\underline{\vec{u}_i := (1/\sigma_i)A\vec{v}_i}$라고 부르기로 하면 $\vec{u}_i$도 단위벡터이다. 또 $i \neq j$일 때

$$\vec{u}_i^T \vec{u}_j = (A\vec{v}_i)^T A\vec{v}_j = \vec{v}_i^T A^TA\,\vec{v}_j = \vec{v}_I^T(\lambda_j \vec{v}_j) = 0$$

이 되어서 $\vec{u}_i$들도 orthonormal system을 이룬다.[15)]

$\vec{u}_i$의 정의를 다시 써 보면 $A\vec{v}_i = \sigma_i \vec{u}_i$이고, 이에 따라 $A^TA\,\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$라는 관계식을 다시 써 보면

$$A^T(\sigma_i \vec{u}_i) = \sigma_i^2 \vec{v}_i \quad \text{즉} \quad A^T\vec{u}_i = \sigma_i \vec{v}_i$$

가 된다. 두 관계식을 함께 정리하면

$$A\vec{v}_i = \sigma_i \vec{u}_i, \quad A^T\vec{u}_i = \sigma_i \vec{v}_i \tag{4.2}$$

라는 관계를 얻는다. 이제 첫번째 식을 행렬 형태로 쓰면

$$A\big[\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_r\big] = \big[\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_r\big]\,\mathrm{Diag}[\sigma_1, \cdots, \sigma_r] \tag{4.3}$$

15) 0이 아닌 eigenvalue λ_i들에 대해서만 계산했으며 이 갯수가 충분하지 않아서 basis는 이루지 않을 가능성이 높다.

이 된다. 여기서

$$U := [\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_r], \quad V := [\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_r]$$

라고 부르기로 하자. 특히 위의 관계식 (4.3)에서

$$AA^T\vec{u}_i = \sigma_i A\vec{v}_i = \sigma_i^2\vec{u}_i = \lambda_i\vec{u}_i$$

가 되어서 λ_i 들은 AA^T 의 고유값이기도 하다. 그리고 이 때의 고유벡터는 $\vec{u}_i$ 들이다. 이 $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ 을 A의 특이값*singular values*이라고 한다.

이제 고유값이 0인 경우의 고유벡터들을 orthnormal이 되도록 $\vec{v}_i$ 들에 추가하여 행렬 $[\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_r]$ 을 $[\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n]$ 으로 만든 다음, 이 행렬의 역행렬 (즉 이 경우에는 전치행렬)을 양변의 오른쪽에 곱하고 다시 고유값(특이값)이 0인 경우의 고유벡터들을 빼면 위의 관계식 (4.3)을 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$A = [\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_r]\ \mathrm{Diag}[\sigma_1, \cdots, \sigma_r]\ [\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_r]^T \tag{4.4}$$

이 관계식을 A의 특이값분해 또는 특이분해*singular value decomposition* 또는 SVD라고 부른다. 그리고 이 식은 정확히 (4.2)의 첫번째 식과 똑같은 식이다.

그러니까 정리하면 선형사상 $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 에 대해서 orthonormal 벡터들과 대각행렬

$$\begin{aligned} U &= [\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_r] \subset \mathbf{R}^m, \\ V &= [\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_r] \subset \mathbf{R}^n, \\ \Sigma &= \mathrm{Diag}[\sigma_1, \cdots, \sigma_r] \end{aligned}$$

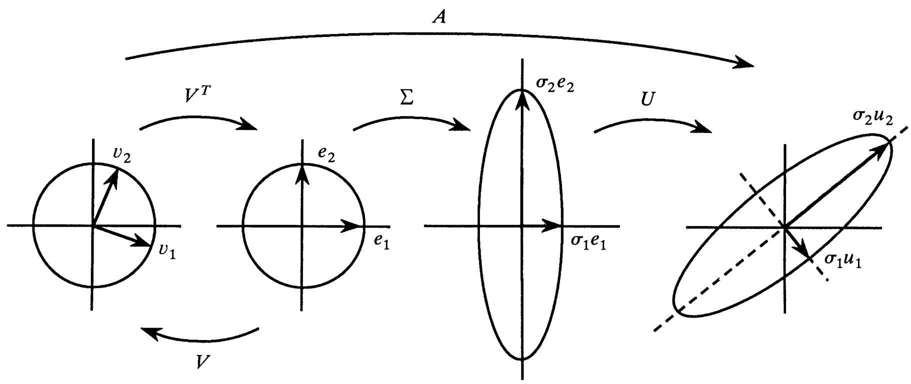
을 찾을 수 있어서 A를 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$\begin{aligned} A = U\Sigma V^T &= \vec{u}_1\sigma_1\vec{v}_1^T + \cdots + \vec{u}_r\sigma_r\vec{v}_r^T \\ &= \sigma_1\vec{u}_1\vec{v}_1^T + \cdots + \sigma_r\vec{u}_r\vec{v}_r^T. \end{aligned}$$

여기서 알게 된 사실을 그림으로 잘 나타낸 것이 Gilbert Strang의 논문 [1]에 잘 나와 있어서 이것을 여기에 인용한다.

이 계산 덕분에 A^T는 A의 경우와 비교해서 U와 V의 역할만 바뀌고 singular value는 똑같은 행렬임을 알 수 있다. 즉

$$A^T = V\Sigma U^T$$



〈그림 4.3〉 이 그림은 Strang의 *Monthly* 논문 "The Fundamental Theorem of Linear Algebra"(1993) [1]에서 발췌한 것이다. V^T는 $\vec{v}_i$를 $\mathbf{e}_i$로 보낸다. Σ는 각 $\mathbf{e}_i$를 $\sigma_i\mathbf{e}_i$로 만들고 다시 U는 $\mathbf{e}_i$를 $\vec{u}_i$로 그러니까 $\sigma_i\mathbf{e}_i$를 $\sigma_i\vec{u}_i$로 보내서 변환을 마무리한다. 이 과정을 우리는 단순히 $\vec{v}_i \mapsto \sigma_i\vec{v}_i \mapsto \sigma_i\vec{u}_i$라고 이해한다.

가 된다. 즉 A가 벡터 V들을 Σ배 하여 U 방향에 맞추어 놓는데 반해서 A^T는 U들을 Σ배 하여 V 방향에 맞추어 놓는다. 그러니까 A^T가 하는 일에서 σ_i배 하는 것 대신에 σ_i로 나눠주기만 하면 A가 한 일을 원래 자리로 돌려놓는다는 것을 알 수 있다.(당연히 A의 null space 부분만은 제대로 돌려놓을 수 없다. 이만큼이 역함수를 만들 수 없는 부분이다.) 즉

$$A^+ = V\Sigma^{-1}U^T \quad (\Sigma^{-1} = \mathrm{Diag}[1/\sigma_1, \ldots, 1/\sigma_r])$$

라고 하는 행렬은 위의 0이 아닌 고유값의 고유벡터들로 span된 eigenspace 위에서만 보면 A의 역행렬이 된다. 이 행렬을 A의 pseudo-inverse라고 부른다. 그리고 전치행렬 A^T는 이 pseudo-inverse와 매우 밀접한 관계에 있다는 것을 알 수 있다. 다시 말하지만 여기서 eigenspace의 complement에서는 A가 모든 벡터를 0벡터로 보내므로 inverse를 만들 수 없고 위의 pseudo-inverse가 최선의 역행렬이 된다. (물론 A^T의 pseudo-inverse는 $U\Sigma^{-1}V^T$가 되어 A와 매우 유사한 기하학적 행동을 보인다.)

주의 위의 특이분해는 보통 compact 분해라고 불린다. 제대로 하려면 U와 V가 각각 $\mathbf{R}^n$과 $\mathbf{R}^m$의 orthonormal basis가 되도록 하고 singular value matrix는 기존의 $r \times r$ 행렬에다가 0 entry인 행과 열을 덧붙여서 $m \times n$ 행렬을 만들어서 분해 $A = U\Sigma V^T$가 각각 $m \times m$, $m \times n$, $n \times n$ 행렬이 되도록 한다. 이것이 정식 SVD이다.

10 주성분분석(PCA)과의 관계

이 특이분해는 통계에서 쓰이는 주성분분석*principal component analysis* 즉 PCA를 설명해주고 또 계산하게 해 주는 도구이다.

이의 관계는 다음과 같이 바라볼 수 있다. 간단하게 평면의 data를 생각해 보자. N개의 데이터 $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$가 어떤 식으로 분포해 있는지를 2차형식 또는 2차곡선으로 근사해 볼 수 있다. 예를 들어 이 데이터가 어떤 타원과 유사하게 분포해 있다고 하면 이 타원의 주축*principal axis*들을 찾고 이 방향으로의 eigenvalue들을 찾아서 표준형으로 만들면 이해하기 쉽다. 이렇게 하려면 우선 전체의 중심이 원점에 놓여 있어야 하므로 이 데이터의 평균을 찾아 이를 중심으로 옮겨놓는 변환(평행이동)을 통해서 전체 데이터의 평균이 $(0, 0)$가 되도록 한다. 즉 데이터들을 $\vec{v}_i = (x_i - \bar{x}, y_i - \bar{y})$로 바꾼다.

이제 이렇게 되었다면 이 데이터를 잘 나타내 주는 타원을 만들어본다. 이것을 어떻게 하는지 알 수 있게 평면에서 예를 들어보자. 4개의 점 $\vec{v}_1 = (2, 0)$, $\vec{v}_2 = (-2, 0)$, $\vec{v}_3 = (0, 1)$, $\vec{v}_4 = (0, -1)$은 대칭으로 놓여 있어서 답을 알고 있고, 그 타원은 x축이 장축으로 그 지름이 4이고 y축이 단축으로 지름이 2가 되는 타원이다. 이 4 점을 가지고 이런 타원을 만드는 방법의 하나로 convex combination과 유사한 방법을 생각한다. 즉

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \leq 1$$

인 네 숫자에 대해서

$$a_1\vec{v}_1 + \cdots + a_4\vec{v}_4 = \sum a_i\vec{v}_i$$

라고 쓸 수 있는 점들을 모두 그려본다. 이것은 평면의 어떤 타원과 그 내부를 이루는 영역이 된다. 데이터 점이 매우 많아도 적절한 계수에 대해서 선형결합을

하되 그 계수의 제곱의 합이 1을 넘지 않도록 하면 항상 어떤 모양의 타원 또는 타원체*elipsoid*가 된다. 이제 이 타원(체)의 주축과 지름들을 찾는 방법은 잘 알려져 있다. 이를 구체적으로 쓰면 어떻게 되는가?

방금 설명한 벡터들은 모두 $\sum_i a_i\vec{v}_i$ 와 같은 꼴이고 여기서 a_i 들의 제곱의 합이 1 보다 작거나 같다. 이 벡터들이 타원(체)를 이루고 이 가운데 크기가 가장 큰 벡터 방향이 타원(체)의 장경이 될 것이므로 우리가 푸는 문제는 다음과 같다:

Find maximum of: $\|\sum_i a_i\vec{v}_i\|$

Subject to: $\sum_i a_i^2 \le 1$

이 문제에서 최대값은 경계에서 나올 것이므로 조건은 $\sum_i a_i^2 = 1$ 이라고 바꿔도 된다. 이 문제는 앞에서 푼 문제와 똑같다.

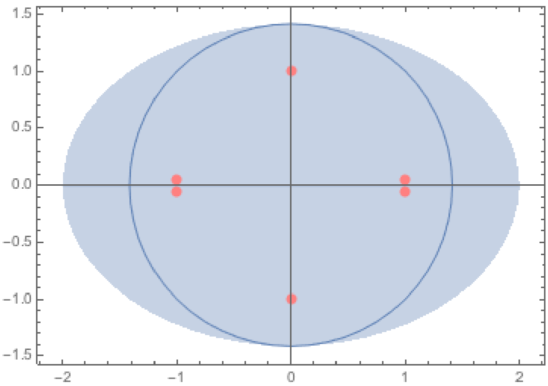
그러니까

$$A = \left[\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_N\right], \quad \mathbf{x} = (a_1, \ldots, a_N)^T$$

이라 할 때 $\|\mathbf{x}\| = 1$ 위에서 $\|A\mathbf{x}\|$의 최대값을 찾는 문제이고 이것은 singular value σ_1 임을 잘 알고 있다. 그 방향은 가장 큰 $A\mathbf{x}$의 방향을 원하므로 특이분해 $A = U\Sigma V^T$ 에서 U 벡터들을 찾아야하고 위에서 보았듯이 이것은 AA^T 의 eigenvector 방향이다. 통계학에서 이 $S = AA^T$ 행렬을 공분산행렬*covariance matrix*이라고 부른다. 그러니까 Data 행렬 A에서 singular value와 그 image 쪽의 left singular vector를 찾아내면 데이터의 개략적인 모양을 알 수 있다.

이런 계산 방법은 다음과 같은 특징을 가진다. 예를 들어 x축 방향으로 벡터가 여러개 있다고 하자. 그러면 이로부터 만들어지는 타원(체)는 어떤 모양인가? x축 방향의 벡터가 단 하나인 경우와는 어떻게 다른가? 구체적으로 x축 방향의 단위벡터 $\mathbf{e}$ 단 한 개만이 데이터인 경우와 이것이 N개인 경우를 비교해보자. 다른 데이터 점들은 무시하고 이 벡터만 선형결합에 관여하는 경우만 보면 다음과 같다.

데이터가 $\mathbf{e}$ 하나만 있는 경우에 선형결합은 $a\mathbf{e}$ 이고 $a^2 \le 1$ 이 되므로 가장 큰 벡터는 $|a| = 1$ 인 경우에 $\pm\mathbf{e}$가 된다. 이것이 우리가 이 방향으로 얻을 수 있는



〈그림 4.4〉 6개의 데이터포인트 $(1, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 1)$를 사용해서 PCA/SVD를 계산해 보면 그림과 같이 2배의 개수를 가진 방향인 x축 방향으로의 singular value가 y축의 $\sqrt{2}$배로 나타난다.

최대 크기 벡터이다. 그런데 이 벡터가 N개라면?[16)] 이 경우에 이 데이터 N개의 계수 a가 모두 같은 경우에 최대값이 나오는데 이 값은 $\sum^N a^2 = Na^2 \leq 1$이 되어야 하므로 $|a| \leq 1/\sqrt{N}$이다. 즉 최대가 되는 경우는 우리가 구하는 선형결합의 모양은 대략

$$\pm \sum^N a\mathbf{e} = \pm N \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{e} = \pm\sqrt{N}\mathbf{e}$$

가 되어서 같은 방향 벡터의 개수 N의 제곱근 $\sqrt{N}$만큼 그 영향을 반영한다. 따라서 비슷한 벡터가 많으면 많을수록 그 방향쪽으로 principal direction이 옮겨오게 돼서 데이터의 밀도를 제대로 반영한 타원(체)가 만들어진다.

예를 들어서 여러 개의 데이터가 크기는 작아도 x축을 따라서 밀집해 있지만 이보다 큰 한 두 개의 벡터가 y축 방향으로 놓여있으면 PCA 즉 SVD가 그리는 타원은 x축 방향에 장축이 있고 y축 방향에 단축이 있는 타원을 그린다. 그림 (4.4)는 이런 예를 하나 보여준다.

16) 똑같은 데이터가 마음에 걸린다면 아주 살짝 서로 다른 벡터가 N개 있다고 해도 계산은 거의 똑같다.

주의

그러나 비록 데이터의 개수를 반영한 타원체를 만들어낸다고 하더라도 데이터 벡터의 크기가 워낙 차이가 크면 원하는 내용을 제대로 반영하기 어렵다. 그러니까 크기가 1인 데이터벡터가 400개가 있다고 하여도 크기가 50인 벡터가 4개 있으면 PCA가 보여주는 그림은 큰 벡터 4개가 그려주는 타원의 주축을 계산해준다. 이 4개의 벡터가 noise라면 이것을 제거하고 계산하지 않으면 안 될 것이다. 데이터 계산에서 이러한 outlier를 제거하는 것은 anomaly detection이라 부르며 매우 중요한 문제이다.

이 절의 참고 문헌

[1] Gilbert Strang, The Fundamental Theorem of Linear Algebra, *Amer. Math. Monthly*, Vlo. 100, No. 9 (1993), pp. 848–855

[2] Gilbert Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, Thomson, Brooks/Cole, 2006.

[3] 김영욱 and Irene Kim, 「행렬, SVD와 PCA」, 한국수학사학회 2019년 가을 학술대회 초록집 (2019).

참고 도서

이 강의록을 작성하는데 참조한 책, 공부하면서 읽으면 도움이 될 책, 더 어려운 내용을 찾아볼 수 있는 책, 이 강의를 들은 후에 더 공부할 수 있는 책 등.

1. Ahlfors, Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill (1979).

   이 책은 복소함수론을 가장 눈에 보이고 손으로 잡아볼 수 있도록 쓴 책이다. 쉽다고는 할 수 없지만 내가 읽어본 책 가운데 복소함수론을 가장 잘 이해할 수 있도록 해 준 책이다.

2. Berger, Geometry I, II, Springer (1987).

   이 책은 고등학교 이상의 기하학에서 미적분학을 사용하지 않고 할 수 있는 거의 모든 것을 수록한 책이다. 자세하게 설명하고 있지는 않지만 차근차근 읽어보면 그리 많은 것을 알지 않고도 읽을 수 있는 수준 높은 책이다.

3. Jennings, Modern Geometry with Applications, Springer (1997).

   고전 기하학을 매우 현대적인 관점에서 쉽게 쓴 책이다. 다른 어떤 책보다도 쉽게 읽을 수 있게 썼다. 이 책의 저자는 내가 대학원을 다닐 때 내 office 와 같은 복도에 office를 가지고 있었고, 태권도와 태극권을 잘 하는 사람이다.

4. Greenberg, Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History, (1980, 1994, 2007).

수학이란 무엇인지를 잘 설명하고 있는 명저이다. 학부에서 수학을 왜 공부하고 어떻게 생각해야 하는가를 공부하려면 꼭 이 책을 읽어보아야 한다. 증명을 따라가는데는 인내심이 매우 필요하다.

5. Hartshorne, Foundations of Projective Geometry (Harvard Lecture Note), Benjamin (1967).

   사영기하를 아주 간단하게 정리하고 있는 유명한 책이다. 저자는 대수기하학 분야에서 매우 유명하다.

6. Pedoe, Geometry: A Comprehensive Course, Dover (1988).

   고전기하학을 쉬운 수준에서 매우 잘 설명하고 있는 뛰어난 책이다. 내용도 꽤 방대하다.

7. Stillwell, Geometry of Surfaces, Springer (1995).

   간단히 기하학의 입문을 잘 설명한 책이다.

8. 김명환, 김홍종, 현대수학입문, 경문사 (2000).

   힐베르트의 문제를 중심으로 현대 수학이 어떻게 발전했으며 이를 이해하려면 어떤 관점으로 바라보아야 하는가를 설명한 명저이다. 위의 Greenberg의 책과 유사한 그러나 전혀 다른 관점에서 쓴 책이다.

9. 양성덕, 양성덕의 미분 기하 강의록, 고려대학교 수학과 (2003, 2007, 2008).

   고려대학교 미분기하학의 교재로서 아마도 가장 쉽게 미분기하를 설명한 강의록이다. 저자는 극소곡면론을 전공하고 있으며 기하학 전반에 대하여 관심을 가지고 있다.

10. 深谷賢治, 雙曲幾何, 岩波書店 (1996).

    기초적인 쌍곡기하를 이해하기 쉽게 쓴 강의록으로 이 주제에 대한 어떤 다른 책보다도 쉽게 잘 썼다. 저자는 현대 기하학 분야 전반에 걸쳐서 뛰어난 연구를 하고 있는 수학자이다.

찾아보기