

Mathematica와 과학계산

고려대학교 수학과

2014년 4월 19일

차례

제 1 장	mathematica와 과학계산	5
제 1 절	간단한 계산하기	5
1.1	근 구하기	5
1.2	적분하기	5
1.3	System of equations 풀기	6
1.4	Asymptotic expansion	7
제 2 절	그래프 그리기	7
2.1	2차 그래프 그리기	7
2.2	3차원 그래프 그리기	8
2.3	Parametric equations 그래프 그리기	9
제 3 절	First Order Differential Equations	11
3.1	Integrator factors	11
제 4 절	Second-Order Linear Equations	13
4.1	Nonlinear Differential Equation에서의 계산	14
4.2	mathematica 명령어들	20
제 5 절	The Laplace Transform	20
5.1	Definition of the Laplace Transform	20
제 6 절	Solution of Initial Value Problems	24

제 1 장

mathematica와 과학계산

제 1 절 간단한 계산하기

1.1 근 구하기

$x^3 - 2x + 1 = 0$ 의 근을 구해보자.

```
Solve[x^3 - 2 x + 1 == 0]
```

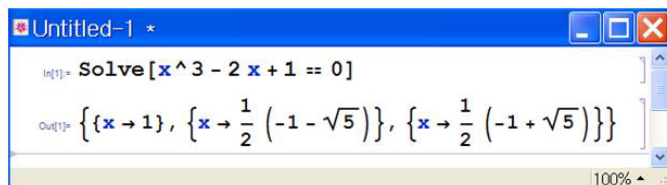


그림 1.1: 근 구하기

1.2 적분하기

$\int_0^{2\pi} x^3 \sin x dx$ 의 적분값을 구해보자. mathematica의 명령문은 아래와 같다.

```
Integrate[x^3*Sin[x], {x, 0, 2*Pi}]
```

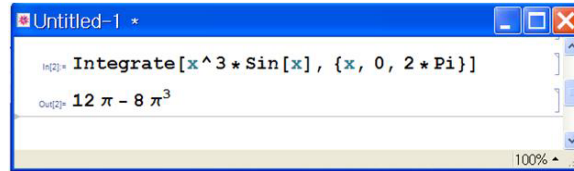


그림 1.2: 적분하기

1.3 System of equations 풀기

먼저 근이 있는(consistent) system을 풀어보자.

$$2x - 3y + 4z = 2$$

$$3x - 2y + z = 0$$

$$x + y - z = 1$$

의 근은 $(7/10, 9/5, 3/2)^T$ 이다. Mathematica로 확인해보자.

```
Integrate[x^3*Sin[x], {x, 0, 2*Pi}]
```

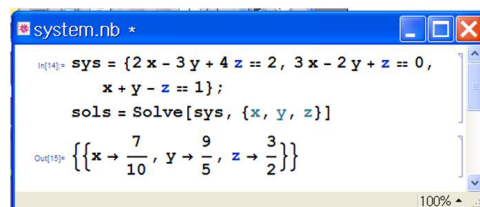


그림 1.3: Nonsingular system 풀기

만일 system이 inconsistent하면 Mathematica는 어떠한 값도 출력하지 않게 된다. singular인 식을 입력해보자.

$$2x - 2y + 2z = -2$$

$$-x + y + 3z = 0$$

$$-3x + 3y - 2z = 1$$

```
sys={2x - 2y - 2z == -2, -x + y + 3z==0, -3x + 3y - 2z ==1};
```

```
sols=Solve[sys, {x, y, z}]
```

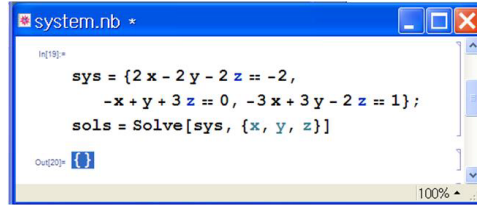


그림 1.4: Singular system 풀기

1.4 Asymptotic expansion

Mathematica command:

```
In[1]:= Collect[Expand[(1 + ε X)4], ε]
Out[1]:= 1 + 4 X ε + 6 X2 ε2 + 4 X3 ε3 + X4 ε4
```

그림 1.5: Polynomial expansion.

제 2 절 그래프 그리기

2.1 2차 그래프 그리기

$y = \sin x$ for $-\pi \leq x \leq 2\pi$ 의 그래프를 그려보자.

```
sys = {2 x - 3 y + 4 z == 2, 3 x - 2 y + z == 0, x + y - z == 1};
sols = Solve[sys, {x, y, z}]
```

이제 여러 개의 함수를 한 그래프에 나타내자.

```
p1 = Plot[Sin[x], x, -Pi, 2 Pi]
```

```
p2 = Plot[ArcSin[x], x, -1, 1, PlotStyle -> GrayLevel[0.3], DisplayFunction -> Identity];
```

```
p3 = Plot[x, x, -Pi, 2 Pi, PlotStyle -> Dashing[0.01], DisplayFunction -> Identity];
```

그러면 다음과 같은 결과가 나온다.

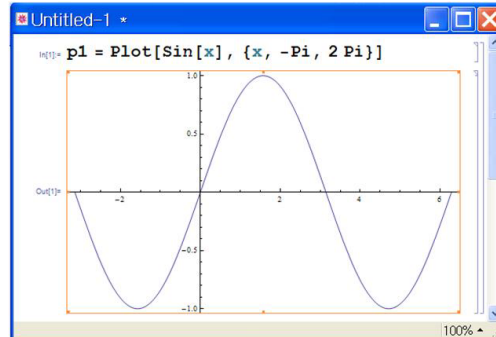


그림 1.6: Sine 함수 그리기

2.2 3차원 그래프 그리기

아래의 식이 3차원에서 어떻게 그려지는 보자.

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + 4y^2}.$$

첫 번째 줄에 함수 $f(x, y)$ 를 정의한다.

```
f[x_, y_] = x^2 y/(x^4 + 4 y^2)
```

그리고 3차원 그래프를 그리기 위해 다음의 명령어를 입력한다.

```
Plot3D[f[x, y], {x, -1/2, 1/2}, {y, -1/2, 1/2}, Axes -> Automatic,  
Boxed -> False, PlotPoints -> {50, 50}]
```

그러면 그림(1.8)이 출력된다. 이 그림에 ContourPlot을 쓰면 등고선 형태로 나타낼 수도 있다. 위와 같이 정의된 함수에

```
ContourPlot[f[x, y], {x, -1/2, 1/2}, {y, -1/2, 1/2},  
PlotPoints -> {50, 50}]
```

ContourPlot을 사용해서 그려본다. 그림(1.8)의 아래의 그래프가 contour한 모습이다.

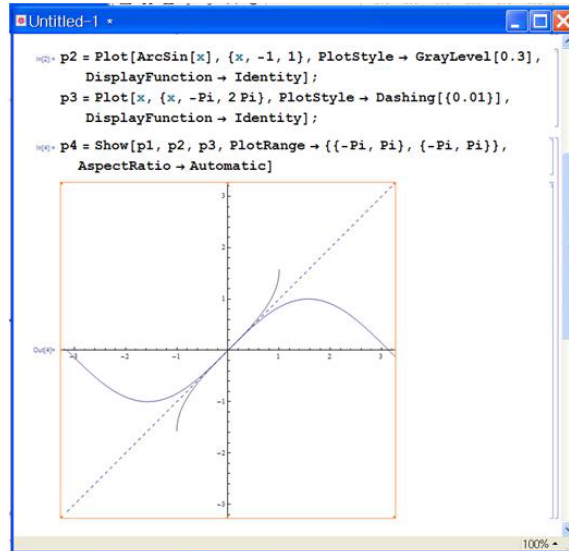


그림 1.7: 함수 여러 개 그리기

2.3 Parametric equations 그래프 그리기

T에 관한 Parametric equation이 있다.

$$x = t + \sin 2t$$

$$y = t + \sin 3t \quad \text{where } -2\pi \leq t \leq 2\pi$$

Mathematica로는 parameter를 정의하여 사용하면 된다.

```
x[t_]=t+Sin[2t]; y[t_]=t+Sin[3 t]; ParametricPlot[x[t],y[t], t,-2Pi,2Pi,
AspectRatio->Automatic]
```

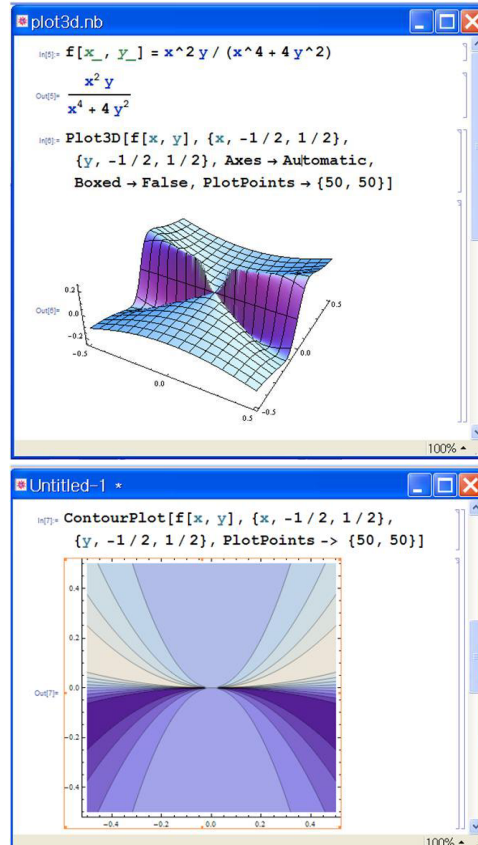


그림 1.8: 3차원 그래프와 Contour 그래프

3차원 곡면을 그릴 때에는 주로 `ContourPlot3D`를 이용하면 편리하다. 예를 들어, 아래 식과 같이 nonparametric form의 Scherk's fifth surface 그림(1.10)을 `ContourPlot3D`를 사용하여 그려 보자.

$$\sin z = \sinh x \sinh y \quad (1.1)$$

`ContourPlot3D[Sin[z]-Sinh[x]Sinh[y], x, -5, 5, y, -5, 5, z, -Pi, 4Pi, Contours->0.0]`

parametrically는 다음 식과 같이 표시할 수 있는데,

$$\mathbf{x}(u, v) = (\text{arc sinh}(u), \text{arc sinh}(v), \arcsin(uv)) \quad (1.2)$$

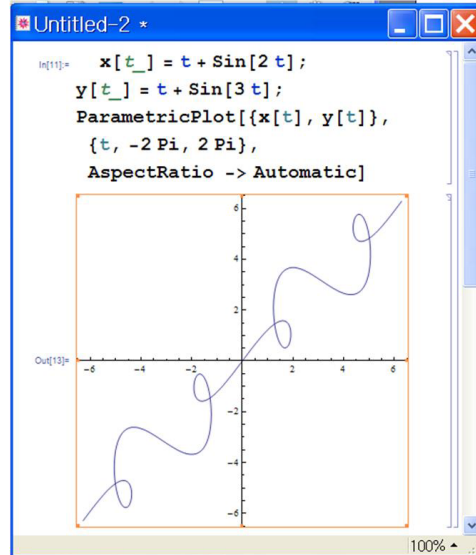


그림 1.9: Parameter 그래프

이 식은 평균곡률(H, mean curvature)가 0이 되는 minimal surface이다.

$$H = \frac{Eg + 2Ff + Ge}{2EG - F^2} = 0. \quad (1.3)$$

제 3 절 First Order Differential Equations

First Order Differential Equations은 일반적으로 독립변수 t 에 의한 $p(t), q(t)$ 에 의한 식으로 나타난다.

$$\frac{dy}{dx} + p(t)y = g(t). \quad (1.4)$$

3.1 Integrator factors

미분식(1.4)에 Integrating factor를 곱하여 근을 구할 수 있다. 다음 예제를 보자.

$$\frac{dy}{dx} = 3y. \quad (1.5)$$

식(1.5)의 양쪽에 e^{3t} 를 곱하면 근을 구할 수 있을 것이다. Mathematica로는

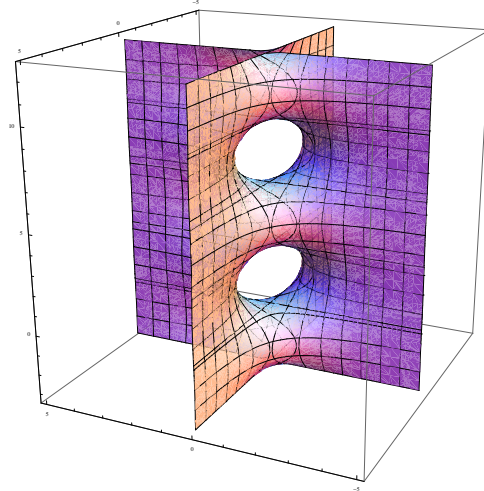


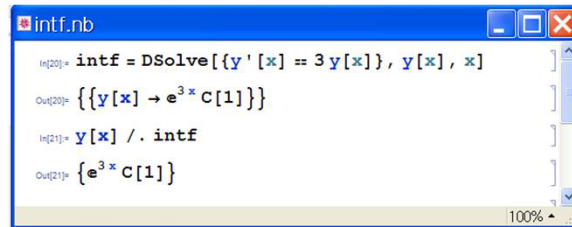
그림 1.10: Scherk saddle tower

```
intf = DSolve[{y'[x] == 3 y[x]}, y[x], x]
```

이렇게 입력하고 여기서 지정한 intf로 y 에 대한 함수로 만들자.

```
y[x] /. intf
```

그러면 계산된 결과가 나온다.



```

intf.nb
In[20]:= intf = DSolve[{y'[x] == 3 y[x]}, y[x], x]
Out[20]:= {{y[x] -> e^{3 x} c[1]}}
In[21]:= y[x] /. intf
Out[21]:= {e^{3 x} c[1]}
  
```

그림 1.11: Integrating factor

근을 구하여 그림으로 그려보자.

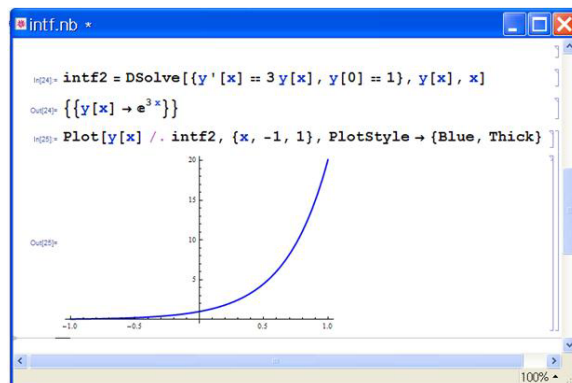


그림 1.12: solution graph

제 4 절 Second-Order Linear Equations

$$4 \frac{d^2 y}{dt^2} - y = t - 2 - 5 \cos t - e^{-t/2}.$$

DSolve를 사용하면 근을 구할 수 있다. Mathematica로 다음과 같이 입력해보자.

```
sol1 = DSolve[4 y''[t] - y[t] == t - 2 - 5Cos[t] - Exp[-t/2], y[t], t]
```

그리고 식을 간단히 해보자.

`Simplify[sol1]`

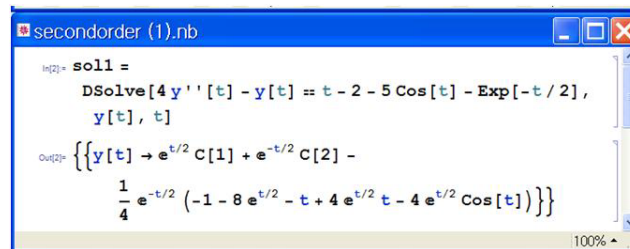


그림 1.13: Second Order Equation

4.1 Nonlinear Differential Equation에서의 계산

다음 식에서 근을 관찰해 보자.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1 - x - y), \\ \frac{dy}{dt} &= y(0.5 - 0.25y - 0.75x) \quad \text{where } x \text{ and } y \text{ are nonnegative. (1.6)}\end{aligned}$$

Mathematica로 위의 주어진 식을 $F(x, y)$ 와 $G(x, y)$ 로 정의한다.

`F[x_,y_] := x(1 - x - y)`

`G[x_,y_] := y(0.5 - 0.25 x - 0.75 x)`

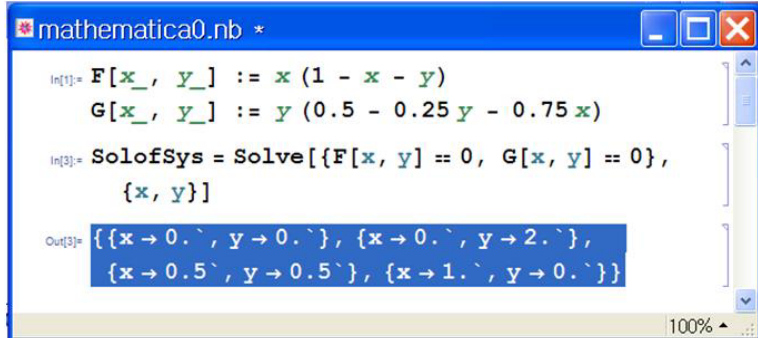
이제 이 식(algebraic equation)을 풀어 critical points를 구한다.

$$\begin{aligned}x(1 - x - y) &= 0 \\ y(0.5 - 0.25x - 0.75y) &= 0\end{aligned}$$

그러면 critical points는 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$ 그리고 $(0.5, 0.5)$ 이 나온다.

Mathematica로는 근(the solutions of the system)을 `SolveSys`로 두고 아래와 같이 입력 후 실행한다.

`SolveSys = Solve[{F[x,y] ==0, G[x,y]==0},{x,y}]`



```

mathematica0.nb *
In[1]:= F[x_, y_] := x (1 - x - y)
        G[x_, y_] := y (0.5 - 0.25 y - 0.75 x)
In[3]:= SolofSys = Solve[{F[x, y] == 0, G[x, y] == 0},
                        {x, y}]
Out[3]:= {{x -> 0., y -> 0.}, {x -> 0., y -> 2.},
          {x -> 0.5, y -> 0.5}, {x -> 1., y -> 0.}}

```

그림 1.14: Mathematica로 critical points를 구한 결과값

앞의 식으로 풀 결과와 같은 critical points를 출력한다. critical points를 구했다면 각 점 근처에서 근(linear approximated)의 모습을 관찰하자. 즉, Jacobian matrix \mathcal{J} 는

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} F_x(x, y) & F_y(x, y) \\ G_x(x, y) & G_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ -0.75y & 0.5 - 0.5y - 0.75x \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

$x = 0, y = 0$ 이면 다음 linear system을 얻게 된다.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

위 식(1.8)의 eigenvalues와 eigenvectors을 구하면

$$r_1 = 1, \quad \xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r_2 = 0.5, \quad \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

따라서 general solution은

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0.5t}$$

$x = 1, y = 0$ 인 경우, 다음 linear system을 얻게 된다.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

위 식(1.11)의 eigenvalues와 eigenvectors을 구하면

$$r_1 = -1, \quad \xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r_2 = -0.25, \quad \xi^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

따라서 general solution은

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-0.25t}.$$

$x = 0, y = 2$ 인 경우에도, 유사하게 다음 linear system을 얻게 된다.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

위 식(1.11)의 eigenvalues와 eigenvectors을 구하면

$$r_1 = -1, \quad \xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad r_2 = -0.5, \quad \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

따라서 general solution은

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0.5t}.$$

$x = 0.5, y = 0.5$ 인 경우, linear system은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -0.375 & -0.125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

위 식(1.11)의 eigenvalues와 eigenvectors을 구하면

$$r_1 = \frac{-5 + \sqrt{57}}{16} \simeq 0.1594, \quad \xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ (-3 - \sqrt{57})/8 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -1.3187 \end{pmatrix},$$

$$r_2 = -\frac{-5 - \sqrt{57}}{16} \simeq -0.7844, \quad \xi^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ (-3 + \sqrt{57})/8 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5687 \end{pmatrix}.$$

따라서 general solution은

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1.3187 \end{pmatrix} e^{-0.1594t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5687 \end{pmatrix} e^{-0.7844t}.$$

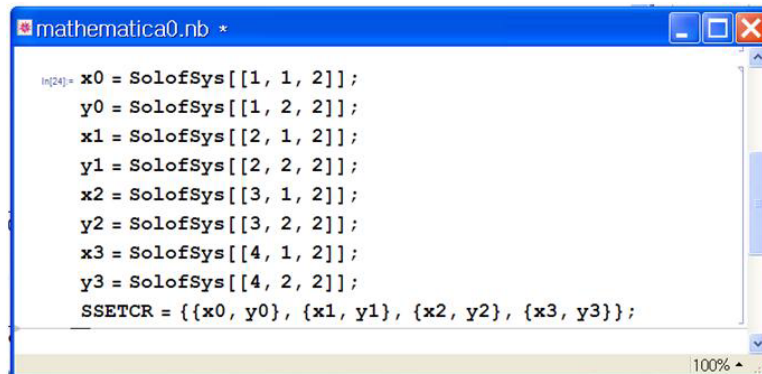
mathematica로도 그려보자.

우선 critical points를 정의해 보자. (x_0, y_0) 를 첫 번째 점(0, 0)으로 같은 식으로 (x_1, y_1) 은 점(0, 2), (x_2, y_2) 은 점(0.5, 0.5)으로 마지막 점은 (x_3, y_3) 은 점(0, 2)으로 정의한다.

```
x0=SolofSys[[1,1,2]];
y0=SolofSys[[1,2,2]];
x1=SolofSys[[2,1,2]];
y1=SolofSys[[2,2,2]];
x2=SolofSys[[3,1,2]];
y2=SolofSys[[3,2,2]];
x3=SolofSys[[4,1,2]];
y3=SolofSys[[4,2,2]];
```

그리고 critical points의 집합을 SSETCR이라고 정의한다.

```
SSETCR = {{x0, y0}, {x1, y1}, {x2, y2}, {x3, y3}};
```



```

In[24]:= x0 = SolofSys[[1, 1, 2]];
          y0 = SolofSys[[1, 2, 2]];
          x1 = SolofSys[[2, 1, 2]];
          y1 = SolofSys[[2, 2, 2]];
          x2 = SolofSys[[3, 1, 2]];
          y2 = SolofSys[[3, 2, 2]];
          x3 = SolofSys[[4, 1, 2]];
          y3 = SolofSys[[4, 2, 2]];
          SSETCR = {{x0, y0}, {x1, y1}, {x2, y2}, {x3, y3}};

```

그림 1.15: critical points와 그 집합을 정의한다.

다음으로 벡터필드(vectorfield)를 그려보자. 벡터필드의 범위는 $0 \leq x \leq 1.5$ 와 $0 \leq y \leq 2$ 로 두자. 그림을 그리는 Mathematica 명령문은 아래와 같다.

```

Fig = VectorFieldPlot[{F[x, y], G[x, y]}, {x, 0, 1.5}, {y, 0, 2},
  Axes -> True, AxesLabel -> {x, y}, AxesOrigin -> {0, 0},
  Background -> LightBlue,
  Epilog -> {PointSize[Large], Point[SSETCR]}, ImageMargins -> 5,
  PlotRange -> {{-0.1, 1.6}, {-0.1, 2.1}},
  Ticks -> {{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5}, {0, 0.5, 1, 1.5, 2}}]

```

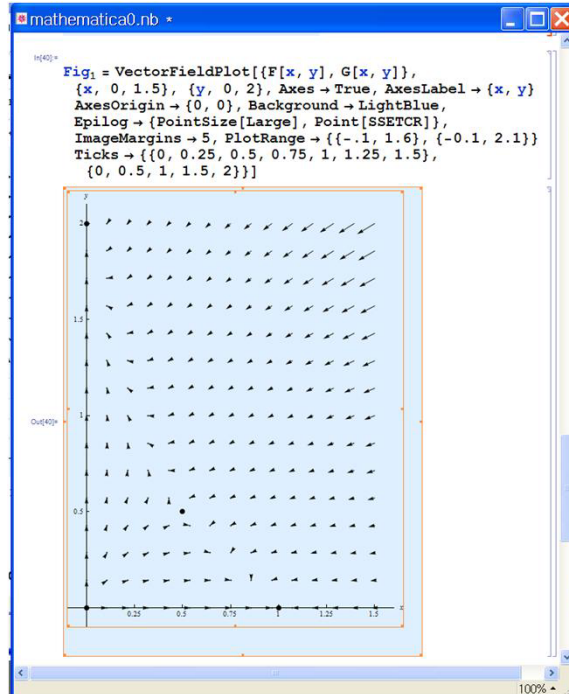


그림 1.16: 벡터필드를 그려본다.

mathematica로 Critical Points 주변의 근을 살펴보자. 식(1.7)은 아래와 같이 계산할 수 있다. \mathcal{J} 는 LM으로 정의하였다. 그리고 MatrixForm을 사용하여 식을 본다.

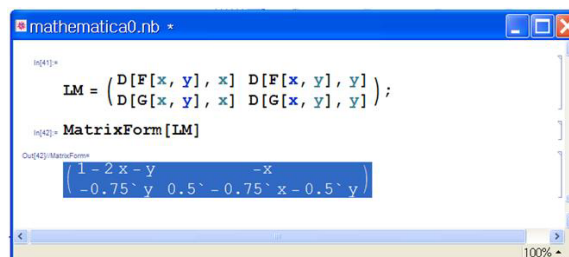


그림 1.17: Jacobian을 구한다.

위에서 구한 LM을 이용하여 critical point(x_0, y_0)를 대입하여 이 행렬을 LM0라 한다. 그리고 Eigensystem 명령어로 eigenvalue와 eigenvector를 구하자. 첫 번째 결과값이 eigenvalue쌍이고 나머지 두 항이 eigenvectors값

이다. 나머지 점들도 같은 방법으로 하면 구할 수 있다.

```

mathematica0.nb
In[43]: LM0 = {D[F[x, y], x] D[F[x, y], y],
              D[G[x, y], x] D[G[x, y], y]} /. {x -> x0, y -> y0};
In[44]: ES0 = Eigensystem[LM0]
Out[44]: {{1., 0.5^}, {{-1., 0.}, {0., -1.}}
  
```

그림 1.18: eigenvalue와 eigenvector를 구한다.

4.2 mathematica 명령어들

실행할 때는 shift+enter를 한다.

→ 표시는 ->를 쓰면 자동으로 만들어 진다.

The Laplace Transform; Differential equations

제 5 절 The Laplace Transform

5.1 Definition of the Laplace Transform

The Laplace transform converts integral and differential equations into algebraic equations. Then the Laplace transform of f , which we will denote by $L\{f(t)\}$ or by $F(s)$, is defined by the equation

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

whenever this improper integral converges.

The Laplace transform is linear: hence, we have

$$L\{af\} = aF, \quad L\{f + g\} = F + G$$

for f, g are two functions whose Laplace transforms exists.

[Example] Find the Laplace transform of $f(t) = 5e^{-2t} - 3\sin 4t$, $t \geq 0$.

[solution]

We may write down $L\{f(t)\} = 5L\{e^{-2t}\} - 3L\{\sin 4t\}$. Then, we can calculate the improper integral as follows

$$L\{f\} = \frac{5}{s+2} - \frac{12}{s^2+16}, \quad s > 0.$$

Piecewise continuous, if it is continuous there except for a finite number of jump discontinuities.

[Example] Sketch the graph of the given function and determine whether f is continuous, piecewise continuous, or neither on the closed interval $0 \leq t \leq 3$.

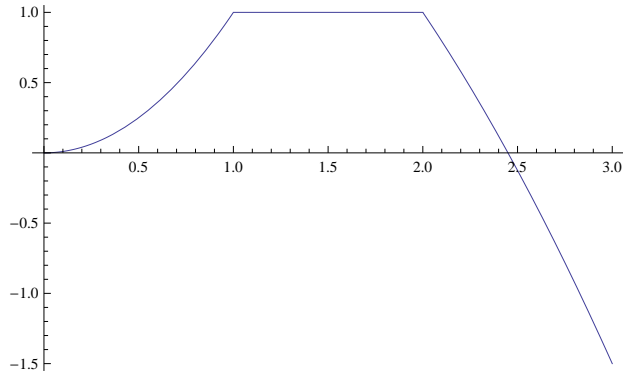
$$f(t) = \begin{cases} t^2 & 0 < t \leq 1, \\ 1 & 1 < t \leq 2, \\ 3 - \frac{t^2}{2} & 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

[solution] Mathematica command:

$$f[t_] = \text{Piecewise} \left[\left\{ \left\{ t^2, 0 \leq t < 1 \right\}, \left\{ 1, 1 < t \leq 2 \right\}, \left\{ 3 - \frac{t^2}{2}, 2 < t \leq 3 \right\} \right\} \right]$$

$$\begin{cases} t^2 & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 < t \leq 2 \\ 3 - \frac{t^2}{2} & 2 < t \leq 3 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\text{Plot}[f[t], \{t, 0, 3\}]$$



[Problem] Sketch the graph of the given function and determine whether f is continuous, piecewise continuous, or neither on the closed interval $0 \leq t \leq 3$.

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & 0 < t \leq 1, \\ \frac{1}{t-1} & 1 < t \leq 2, \\ 2 & 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

[Example] Find the Laplace transform, $f(t) = t$.

[solution]

$$L\{t\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left\{ \left[-\frac{1}{s} e^{-st} t \right]_0^A + \int_0^A \frac{1}{s} e^{-st} dt \right\} = \frac{1}{s^2}.$$

Mathematica command:

LaplaceTransform[t, t, s]

[Problem] Find the Laplace transforms, $f(t) = t^2$ and $f(t) = t^n$.

[Example] Find the Laplace transform, if we have $f(t) = \sin at$, $t \geq 0$,

where a is a real constant.

[solution]

$$L\{\sin at\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin at dt, \quad s > 0.$$

$$F(s) = \lim_{A \rightarrow \infty} \left\{ \left[-\frac{e^{-st} \cos at}{a} \right]_0^A - \frac{s}{a} \int_0^A e^{-st} \cos at dt \right\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0.$$

[Problem] Find the Laplace transforms, $f(t) = \cos at$.

Denote that certain **rules**.

$L\{af(t) + bg(t)\} =$	$aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\}.$	linearity
$L\{e^{at}f(t)\} =$	$L\{f(t)\} _{s \rightarrow (s-a)}$	first shifting rule
$L\{f(t-a)H(t-a)\} =$	$e^{-as}L\{f(t)\}$	second shifting rule
$L\{f^n(t)\} =$	$s^n L\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0).$	t-differentiation
$L\{tf(t)\} =$	$-\frac{d}{ds}L\{f(t)\}$	s-differentiation
$L\{f(t)\}L\{g(t)\} =$	$L\{(f * g)(t)\}$	Convolution rule

[Example] Establish the Laplace transform,

$$L\{t \sinh at\} = \frac{2as}{(s^2 - a^2)^2}.$$

[solution]

$$L\{t \sinh at\} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{a}{s^2 - a^2} \right) = \frac{2as}{(s^2 - a^2)^2}.$$

[Problem] Find the Laplace transforms, $f(t) = t \sin at$.

Mathematica command:

LaplaceTransform[t * Sin[a * t], t, s]

제 6 절 Solution of Initial Value Problems

[Example] Find the inverse Laplace transform of the given function

$$F(s) = \frac{2s + 2}{s^2 + 2s + 5}$$

.

[solution]

$$L^{-1} \left\{ \frac{2s + 2}{s^2 + 2s + 5} \right\} = 2L^{-1} \left\{ \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 4} \right\} = 2e^{-t} \cos 2t, \quad s > -1.$$

Mathematica command:

example = InverseLaplaceTransform[(2s + 2)/(s^2 + 2s + 5), s, t];

Complex = ComplexExpand[example];

Simplify[%]

[Problem] Find the inverse Laplace transform of the given function

$$F(s) = \frac{2s - 3}{s^2 + 2s + 10}$$

[Example] We let $F(s)$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

It is possible to show that as far as f is piecewise continuous on $0 \leq t \leq A$ for positive A and $|f(t)| \leq Ke^{at}$ when $t \geq M$. Then show that $F'(s) = L\{-tf(t)\}$.

[solution]

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{dF}{ds} = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} (-t) e^{-st} f(t) dt = - \int_0^{\infty} t e^{-st} f(t) dt \\ &= -L\{tf(t)\} \end{aligned}$$

[Problem] Show that $F^n(s) = L\{(-t)^n f(t)\}$.

If $f(t)$ is piecewise continuous and of exponential order on $[0, \infty)$ and $L\{f(t)\} = F(s)$, then we call f the **inverse Laplace transform** of F and denote it by $f = L^{-1}\{F\}$. We have same a linearity such that

$$L^{-1}\{c_1 F + \cdots + c_n F_n\} = c_1 L^{-1}\{F_1\} + \cdots + c_n L^{-1}\{F_n\}.$$

[Example] Use the Laplace transform to solve the given initial value problem.

$$y'' - y' - 6y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y(0)' = -1.$$

[solution] Apply Laplace transform to both sides of the differential equation.

$$\begin{aligned} [s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] - [sY(s) - y(0)] - 6Y(s) &= 0 \\ (s^2 - s - 6 - Y(s) - s + 1 + 1) &= 0 \\ Y(s) = \frac{s - 2}{s^2 - s - 6} &= \frac{4}{5} \frac{1}{s + 2} + \frac{1}{5} \frac{1}{s - 3} \end{aligned}$$

Therefore,

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \frac{4}{5}e^{-2t} + \frac{1}{5}e^{3t}.$$

Mathematica command:

```
eqn = {y''[t] - y'[t] - 6y[t] == 0}
```

```
EQN = LaplaceTransform[eqn, t, s]
```

```
InitialCond = {y[0] -> 1, y'[0] -> -1};
```

```
EQN/.InitialCond
```

```
Y[s] = Solve[EQN/.InitialCond, LaplaceTransform[y[t], t, s]]
```

```
InverseLaplaceTransform[LaplaceTransform[y[t], t, s]/.Y[s], s, t]
```

[Problem]

$$y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0 \quad y(0) = 0, \quad y(0)' = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1.$$

The Unit Step Function

To deal effectively with functions having jump discontinuities, it is very

helpful to introduce a function known as the unit step function or Heaviside function. This function is defined by

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 & t \geq 0. \end{cases}$$

In applications the Heaviside function often represents a force, voltage, current, or signal that is turned on at time $t = 0$, and left on thereafter. Translations of the Heaviside function are used to turn such functions on at times other than 0. For a real number c , we define

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & t < c, \\ 1 & t \geq c. \end{cases}$$

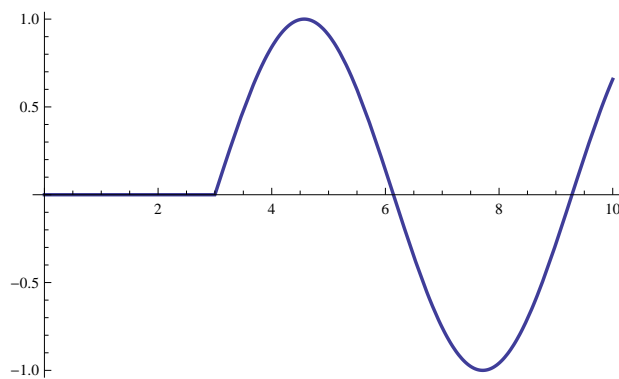
[Example] Sketch the graph of the given function on the interval $t \geq 0$.

$$g(t) = f(t - 3)u_3(t), \quad \text{where } f(t) = \sin t.$$

[solution]

Mathematica command:

`Plot[Sin[t - 3]HeavisideTheta[t - 3], {t, 0, 10}, PlotStyle -> Thick]`



And change the variables a and c .

Mathematica command:

Manipulate[Plot[Sin[t - c]HeavisideTheta[t - c], {t, 0, 10},

PlotRange → {{0, 10}, {-1, 1}}, PlotStyle → Thick], {c, 0, 10}]

[Problem] Sketch the graph of the given function on the interval $t \geq 0$.

$$g(t) = u_1(t) + 3u_3(t) - 6u_4(t).$$

[Example] Find the Laplace transform of the given function.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 2, \\ (t - 2)^2, & t \geq 2. \end{cases}$$

[solution]

Mathematica command:

f[t_] = Piecewise [{{0, t < 2}, {(t - 2)^2, t ≥ 2}}]

LaplaceTransform[f[t], t, s]

Plot[f[t], {t, 0, 4}, PlotStyle → Thick]

Plot [HeavisideThetat - 2^2, {t, 0, 4}, PlotStyle → Thick]

[Problem] Find the Laplace transform of the given function.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < \pi, \\ t - \pi & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

참고 문헌

- [1] 양성덕, 양성덕의 미분 기하 강의록, copy, (2007)
- [2] 이식, 이홍석, 김정한, 이승우, *MPI 병렬 프로그래밍*, Oxford 어드북스(한솜), (2010)
- [3] 김민장, *프로그래머가 몰랐던 멀티코어 CPU 이야기*, 한빛미디어, (2010)
- [4] 저) 제스 리버티, 역) 박춘, *초보자를 위한 C++*, 정보문화사 (2006)
- [5] 이현창, *(뇌를 자극하는)C++ 프로그래밍*, 한빛미디어, (2006)
- [6] M. Belkin, J. Sun, Y. Wang, Discrete laplace operator on meshed surfaces, Proceeding SCG '08 (2008) 278–287.
- [7] C. L. BAJAJ, G. XU, Anisotropic Diffusion of Surfaces and Functions on Surfaces, Journal ACM Transactions on Graphics 22, (2003) 4–32.
- [8] F. Catté, P. Lions, J. Morel, T. Coll *Image Selective Smoothing and Edge Detection by Nonlinear Diffusion*, SIAM J. NUMER. ANAL. vol. 28, No.1, pp. 182-193 (1992)
- [9] D. J. Duffy, *Finite Difference Methods in Financial Engineering*, John Wiley & Sons, (2006)
- [10] A.A. Soliman, A.H.A Ali, K.R. Raslan, Numerical solution for KdV equation based on similarity reductions, Appl. Math. Modell, (2008), —.

- [11] C.Herring, Surface Tension as a Motivation for Sintering In, The physics of Powder Metallurgy, McGraw-Hill, New York, (1951), 143.
- [12] Gropp W., Lusk E., Skellum A. *Using MPI Portable Parallel Programming with the Message-Passing Interface* , 2/E, The MIT Press , (1999)
- [13] G. Xu, Discrete Laplace-Beltrami Operator on Sphere and Optimal Spherical Triangulations, Int. J. Comput. Geometry Appl. 16 (2006) 75–93.
- [14] Z. Li, An Overview of The Immersed Interface Method and its Applications, Taiwanese journal of mathematics 7, (2003) 1-49.
- [15] C. H., Min, *Numerical Analysis & Scientific Computing*, cheong moon gak, (2010)
- [16] N. A., Nakhlé, *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems 2ED*, Pearson, pp. 561-562 (2004)
- [17] John Oprea, The Mathematics of Soap Films: Explorations with Maple, AMS, (2000).
- [18] G. S. Birman, K. Nomizu, Trigonometry in Lorentzian Geometry, Mathematical Association of America 91, 9 (1984) 543-549.
- [19] Petersen W.P., Arbenz P, *An Introduction to Parallel Computing*, Oxford University Press, (2004)
- [20] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, B. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 77*, the Press Syndicate of the University of Cambridge, (1992)
- [21] Pacheco P.S., *Parallel Programming with MPI*, Morgan Kaufmann Publishers, (1997)
- [22] Quinn Micheal J., *Parallel Programming in C with MPI and OPENMP*, McGraw Hill , (2003)

- [23] Rafael, Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space, Instituto de Matemática Estatística, (2008).
- [24] S., Osher, R. Fedkiw, *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Springer , (2003)
- [25] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction Numerical Analysis*, Springer , (2000)
- [26] J. A., Sethian, *Level Set Methods and Fast Marching Methods*, Cambridge University Press, (1999)
- [27] Mattson Timothy G., Sanders Veverly A., Massingill Berna L., *Patterns for Parallel Programming*, Addison Wesley, (2005)
- [28] G Wulff, Z. Krystallog, Zur Frage des Geschwindigkeit des Wachstums und der Auflö der Krystallflächen, Mineral. 34 (1901) 449.
- [29] S.M. Allen and J.W. Cahn, A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening, Acta Metall., **27** (1979), pp. 1085–1095.
- [30] M. Wardetzky, convergence of the cotangent: formula an overview, Discrete differential geometry 38 (2008) 275–286.
- [31] J. M. Sullivan, Curvatures of Smooth and Discrete Surfaces, Discrete differential geometry 38, 175–188.
- [32] M Meyer, M Desbrun, P Schröder, AH Barr, Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds, Proc. VisMath. (2002)