기초 행렬 계산

고려대학교 교양수학실

안암 수학 강의록 시리즈
제 4권

고려대학교 수학과

기초 행렬 계산

고려대학교 교양수학실

Mathematics Subject Classification (2010): 15-01

편집 및 발행: 고려대학교 수학과

발행일: 2024년 1월 (v 0.1)

이 책은 TEX과 Oblivoir 클래스를 사용해 조판하였다. 글꼴은 TeX Gyre Pagella, TeX Gyre Heros, Source Han Serif 및 Noto Sans를 사용하였다.

머릿말

본 강의록은 고려대학교 1학년 학생들, 특히 고등학교에서 행렬 관련 내용을 배우지 않았거나 아직 행렬 계산에 익숙지 않은 학생들을 위해 작성하였습니다.

교양수학실은 2020년 한국연구재단이 지원한 대학혁신지원사업을 수행하였습니다. 그 사업의 일환으로 교양수학실 김용무, 장정환, 조영경 선생님께서 공동으로 집필하고 배포한 '행렬'이라는 제목의 책자가 이 강의록의 원형입니다. 이후 학생들과 강의하시는 분들의 의견을 수렴하고 난이도 조정 등의 보완 작업을 거쳐서 2022년 개정판을 제작하였는데, 이를 다시 수정하고 편집한 것이 본 강의록입니다.

행렬에 대한 이론적인 내용은 '선형대수' 등의 과목에서 자세히 다루므로, 이 강의록에서는 행렬의 기본적인 용어와 연산에 대해 간략히 소개한 후 일차 연립방정식 풀이법, 행렬식, 역행렬 등에 대한 계산적인 측면을 위주로 설명합니다. 이 강의록의 내용과 구성에 대한 의견 제안 및 오류 제보 등은 2021년과 2022년 교양수학 주임교수로 이 강의록을 최종 편집한 김상집에게 이메일(sk23@korea.ac.kr)로 알려주기 바랍니다. 여러 학생들에게 도움이 되기 바랍니다.

2024년 1월
고려대학교 교양수학실

차 례

제 1 장

행렬의 정의와 연산

1.1 행렬의 정의

행렬(단수: matrix, 복수: matrices)은 여러 양(量)이나 수(數) 또는 식(式) 등과 같은 것을 같은 길이의 가로 방향 줄(씨줄)들 또는 세로 방향 줄(날줄)들로 늘어놓아서 전체가 직사각형 모양으로 된 배열을 뜻한다. 가로 방향 줄을 행(行, row), 세로 방향 줄을 열(列, column)이라 부르는데, 맨 위에 있는 행부터 아래쪽으로 차례차례 번호를 매겨 각 행을 '1행', '2행', ... 이라 하고 맨 왼쪽에 있는 열부터 오른쪽으로 차례차례 번호를 매겨 각 열을 '1열', '2열', ... 이라 한다.

행의 개수가 m, 열의 개수가 n 인 행렬 A 는 다음과 같이 표현한다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1. 위 행렬을 간단하게 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ 또는 $A = [a_{ij}]$ 라고 쓴다.

2. 행렬 A 의 i 행과 j 열에 놓인 대상을 일컬어 행렬 A 의 (i, j) 요소(entry) 또는

원소(element)라고 하고 $(A)_{ij}$로 표기한다. 위의 예에서는 $(A)_{ij} = a_{ij}$이다.

3. m개의 행과 n개의 열을 갖고 있는 행렬을 $m \times n$ 행렬(m by n matrix)이라고 한다. 이 '행렬의 크기(size)가 $m \times n$'이라고도 한다.

4. 이 강의록에서는 모든 요소가 실수인 행렬, 즉 실수 행렬(real matrices, matrices over real numbers)만 다룬다.

5. 특별히 크기가 $m \times n$으로 모든 요소들이 영(zero)인 실수 행렬을 $m \times n$ 영행렬(zero matrix)이라고 부르고 $O_{m\times n}$으로, 문맥상 혼동의 여지가 없을때는 간단히 O로 표기한다.

6. 다음 두 조건을 만족하면 '두 행렬 A와 B는 같다(equal)'라고 하고 $A = B$로 표기한다.

   a) 두 행렬 A와 B의 크기가 같다.

   b) 가능한 모든 i와 j에 대해 $(A)_{ij} = (B)_{ij}$이다. 즉 두 행렬의 동일한 위치에 있는 요소들은 서로 같다.

1.2 행렬의 덧셈

행렬의 덧셈(addition)은 크기가 서로 같은 두 행렬에 대해서만 정의한다. 임의의 $m \times n$ 행렬 A와 B가 주어졌을때, 모든 가능한 i와 j에 대해 $(A)_{ij} + (B)_{ij}$를 (i, j) 요소로 갖는 $m \times n$ 행렬을 'A에 B를 더한 <u>합</u>(sum)'이라 하고 $A + B$로 표기한다.

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}.$$

1. 임의의 $m \times n$ 행렬 A, B, C와 $m \times n$ 영행렬 O에 대해 다음이 성립한다.

   a) $A + B = B + A$.

   b) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

   c) $A + O = A, O + A = A$.

2. 첫째와 둘째는 행렬의 덧셈이 <u>교환적</u>(commutative)이고 <u>결합적</u>(associative)라는 것을, 마지막은 영행렬이 행렬의 덧셈에 대한 <u>항등원</u>(additive identity)이라는 것을 말하고 있다.

1.3 행렬의 스칼라 곱

스칼라(scalar)는 사다리를 뜻하는 라틴어 scala에서 유래한 단어이다. 상대적 규모나 등급, 계층 구조, 측정기의 눈금 등의 의미를 갖는 영어 단어 scale도 같은 단어에서 유래하였다. 이 강의록에서는 실수(實數, real number)를 뜻한다. 임의의 $m \times n$ 행렬 A 와 임의의 스칼라 k가 주어졌을때 행렬 A의 모든 요소에 k를 곱해서 얻은 $m \times n$ 행렬을 kA 표기한다. 즉, 모든 i, j에 대해 다음이 성립한다.

$$(kA)_{ij} = k(A)_{ij}.$$

이렇게 해서 얻은 행렬 kA를 '행렬 A의 k배'라고 한다. 이와 같은 연산을 행렬의 스칼라 곱 (또는 스칼라 배, scalar multiplication)이라고 부른다.

1. 크기가 $m \times n$인 임의의 두 행렬 A와 B, 임의의 두 스칼라 r과 s, 그리고 $m \times n$ 영행렬 O에 대해 다음이 성립한다.

   a) $1A = A$, $0A = O$, $rO = O$.

   b) $r(A + B) = rA + rB$.

   c) $(r + s)A = rA + sA$.

   d) $r(sA) = (rs)A = s(rA)$.

2. $(-1)A$ 를 종종 $-A$로 쓴다. $-A$는 행렬 A의 덧셈에 대한 역원(additive inverse)이 된다.
$$A + (-A) = (-A) + A = O.$$

3. 크기가 같은 두 행렬의 뺄셈(subtraction) $A - B$는 $A + (-1)B$를 의미한다.

예 1.3.1. 아래 2×3 행렬 A와 B에 대해 $A + B$, $B - A$, $2A$, $(-3)A + 2B$를 계산해 보자.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -7 \\ -1 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

1. $A+B$.

$$A+B=\begin{bmatrix}9+(-4) & (-3)+2 & 2+(-7)\\ 4+(-1) & 7+0 & (-6)+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -1 & -5\\ 3 & 7 & 3\end{bmatrix}.$$

2. $B-A$.

$$\begin{aligned}B-A=B+(-1)A&=\begin{bmatrix}-4 & 2 & -7\\ -1 & 0 & 9\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}9 & -3 & 2\\ 4 & 7 & -6\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}-4 & 2 & -7\\ -1 & 0 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-9 & 3 & -2\\ -4 & -7 & 6\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}(-4)+(-9) & 2+3 & (-7)+(-2)\\ (-1)+(-4) & 0+(-7) & 9+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-13 & 5 & -9\\ -5 & -7 & 15\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

3. $2A$.

$$2A=2\begin{bmatrix}9 & -3 & 2\\ 4 & 7 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 9 & 2\cdot(-3) & 2\cdot 2\\ 2\cdot 4 & 2\cdot 7 & 2\cdot(-6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18 & -6 & 4\\ 8 & 14 & -12\end{bmatrix}.$$

4. $(-3)A+2B$.

$$\begin{aligned}(-3)A+2B&=(-3)\begin{bmatrix}9 & -3 & 2\\ 4 & 7 & -6\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-4 & 2 & -7\\ -1 & 0 & 9\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}-27 & 9 & -6\\ -12 & -21 & 18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8 & 4 & -14\\ -2 & 0 & 18\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}(-27)+(-8) & 9+4 & (-6)+(-14)\\ (-12)+(-2) & (-21)+0 & 18+18\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}-35 & 13 & -20\\ -14 & -21 & 36\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

1.4 행렬의 곱셈

두 행렬의 곱셈(multiplication)을 정의하자. 크기가 $m \times n$인 행렬 A와 $n \times \ell$ 행렬 B가 주어졌을때, 행렬 A의 i행 요소들과 행렬 B의 j열 요소들을 이용하여 계산한 아래 값을 (i, j) 요소로 갖는 $m \times \ell$ 행렬을 'A와 B의 곱(product)'이라고 하고 AB로 표기한다.

$$\begin{aligned}(AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik}(B)_{kj} \\ &= (A)_{i1}(B)_{1j} + (A)_{i2}(B)_{2j} + \cdots + (A)_{in}(B)_{nj}.\end{aligned}$$

1. 행렬의 곱셈은 특정 크기 조건을 만족하는 두 행렬에 대해서만 정의하는 점에 주의하자. 행렬 AB는 A의 열의 개수와 B의 행의 개수가 동일할때만 정의할 수 있고, 이때 AB의 행의 개수는 A의 행의 개수와, 열의 개수는 B의 열의 개수와 같다.

2. 두 행렬 A와 B의 크기가 모두 $n \times n$, 즉 동일한 크기의 정사각행렬이라면, 두 개의 곱 AB와 BA가 모두 잘 정의되고 두 곱의 결과 역시 $n \times n$ 행렬이다.

3. 임의의 $p \times q$ 행렬 A_1과 A_2, $q \times r$ 행렬 B_1과 B_2, $r \times s$ 행렬 C, 그리고 스칼라 k에 대하여, 다음이 성립한다.

   a) $(A_1B_1)C = A_1(B_1C)$.

   b) $A_1(B_1 + B_2) = A_1B_1 + A_1B_2$.

   c) $(A_1 + A_2)B_1 = A_1B_1 + A_2B_1$.

   d) $k(A_1B_1) = (kA_1)B_1 = A_1(kB_1)$.

4. 위의 첫째 성질은 행렬의 곱셈이 결합적(associative)이라는 것을, 둘째와 셋째 성질은 행렬 연산에서도 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙(distributive law)이 성립함을 말하고 있다.

행렬 연산은 앞서 본 것처럼 실수 연산과 유사한 성질들이 있다. 하지만 매우 다른 점들도 있으므로 각별한 주의를 요한다. 다음 예제들을 살펴보자.

예 1.4.1. 행렬 A의 크기가 $m \times n$이고 B의 크기가 $n \times \ell$일 경우 두 행렬의 곱 AB를 정의하였다. 오직 $\ell = m$인 경우에만 추가적으로 BA를 정의할 수 있다. 다음 두 행렬에 대해 AB와 BA를 구해보자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. AB.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. BA.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

예 1.4.2. 두 행렬 A와 B가 동일한 크기의 정사각행렬이면 AB와 BA가 모두 잘 정의가 되고 크기도 같다. 이러한 경우에도 행렬의 곱하기는 일반적으로 교환적(commutative)이지 않다. 다음의 두 정사각행렬 A와 B에 대해 곱 AB와 BA를 구해보자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. AB.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -7 & 17 \\ 6 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 25 \end{bmatrix}.$$

2. BA.

$$BA = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -20 & 19 \\ 9 & -2 & 9 \\ 10 & 2 & 16 \end{bmatrix}.$$

예 1.4.3. 영행렬이 아닌 두 행렬의 곱이 영행렬이 되기도 한다. 다음의 두 정사각행렬 A와 B에 대해 AB와 BA를 구해보자.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. AB.

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 & 4 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 \\ 10 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 & 10 \cdot 2 + (-5) \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. BA.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 10 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-5) \\ 2 \cdot 4 + 4 \cdot 10 & 2 \cdot (-2) + 4 \cdot (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -12 \\ 48 & -24 \end{bmatrix}.$$

예 1.4.4. 다음 예제는 A가 영행렬이 아니고 $B \neq C$임에도 불구하고 $AB = AC$가 성립할 수 있음을 보여준다. 다시 말해서, 행렬 방정식의 경우 $AB = AC$에서 양변의 A를 소거하여 $B = C$라고 결론 내릴 수 없다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. AB.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

2. AC.

$$AC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

1.5 여러 가지 행렬

1. 정사각행렬(square matrix): 행의 개수와 열의 개수가 같은 행렬을 일컫는다.

2. 행렬 A의 $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, ... 원소들을 이은 직선을 A의 주대각선(main diagonal)이라고 하고, 주대각선에 위치한 원소들 $(A)_{11}$, $(A)_{22}$, $(A)_{33}$, ... 을 주대각원소(main diagonal elements)라고 부른다.

3. 정사각행렬 A의 주대각원소들의 합을 A의 대각합(trace)이라고 부르고 $\text{tr}(A)$로 표기한다. 대각합은, 뒤에 소개할 행렬식(determinant)과 함께, 정사각행렬의 특성을 알려주는 중요한 값들 중 하나이다. 행렬 A의 크기가 $n \times n$일 경우,

$$\text{tr}(A) = (A)_{11} + (A)_{22} + \cdots + (A)_{nn}.$$

4. 크기가 같은 임의의 두 정사각행렬 A와 B에 대하여 다음 등식이 항상 성립하는 것을 확인해보자.

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B).$$

5. 전치행렬(transpose): $m \times n$ 행렬 A에 대해, (i, j) 원소가 행렬 A의 (j, i) 원소인 $n \times m$ 행렬을 A의 전치행렬이라 하고, 이를 A^T로 표기한다. 즉, 모든 가능한 i, j에 대해 $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$이 성립한다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

행렬 A의 i행은 A^T의 i열, A의 j열은 A^T의 j행이다. 이로부터, 행렬 A의 전치행렬 A^T는 A를 자기 자신의 주대각선을 기준으로 뒤집은 것과 같음을 알 수 있다.

6. 전치행렬이 그 자신과 동일한 행렬, 즉 $A = A^T$를 만족하는 행렬 A를 대칭행렬(symmetric matrix)이라고 한다. 대칭행렬은 정사각행렬이고 원소들은 주대

각선을 중심으로 대칭을 이룬다. 즉 모든 i, j에 대해

$$(A)_{ij} = (A)_{ji}.$$

7. 상삼각행렬(upper triangular matrix): 주대각선 아래쪽 원소들이 모두 0인 정사각행렬을 일컫는다. 즉, U가 상삼각행렬인 것은 모든 $i > j$에 대해 $(U)_{ij} = 0$ 임을 뜻한다.

8. 하삼각행렬(lower triangular matrix): 주대각선 위쪽 원소들이 모두 0인 정사각행렬을 일컫는다. 즉, L이 하삼각행렬인 것은 모든 $i < j$에 대해 $(L)_{ij} = 0$ 임을 뜻한다.

9. 대각행렬(diagonal matrix): 주대각선을 제외한 원소들이 모두 0 인 정사각행렬을 일컫는다. 즉, D가 대각행렬인 것은 모든 $i \neq j$에 대해 $(D)_{ij} = 0$ 임을 뜻한다. 다르게 표현하면, D가 상삼각인 동시에 하삼각행렬임을 뜻한다.

예 1.5.1. 아래 행렬들은 각각 상삼각, 하삼각, 대각행렬이다.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

이들의 전치행렬 U^T, L^T, D^T는 각각 하삼각, 상삼각, 대각행렬이다.

예 1.5.2. 전치행렬에 대한 다음 성질들을 확인해보자. 먼저 등호 양쪽에 있는 두 행렬의 크기를 비교한 후, (i, j) 원소를 비교해보자.

1. $\left(A^T\right)^T = A$.

2. $(A + B)^T = A^T + B^T$.

3. 임의의 스칼라 k에 대해, $(kA)^T = kA^T$.

4. $(AB)^T = B^T A^T$.

계속해서 다양한 행렬들의 정의를 살펴보자.

1. 스칼라행렬(scalar matrix): 주대각원소들이 모두 같은 대각행렬을 뜻한다. 즉, 다음과 같은 꼴의 행렬이다.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}.$$

2. 특히, 주대각원소들이 모두 1인 $n \times n$ 스칼라행렬을 단위행렬(identity matrix)라고 하고 I_n, 또는 문맥상 혼동의 여지가 없을 경우 간단히 I로 표기한다.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

스칼라행렬은 단위행렬의 스칼라 배로 표현할 수 있다. 바로 위의 예에서 행렬 A의 크기가 $n \times n$일 때 $A = aI_n$이다.

3. 모든 $n \times n$ 행렬 A에 대해 다음 등식이 성립함을 확인해보자.

$$AI_n = A, \qquad I_nA = A.$$

즉, 단위행렬 I_n은 $n \times n$ 행렬들의 모임에 정의된 행렬 곱하기 연산의 항등원(multiplicative identity)이다.

4. 행렬 A에 대해, 다음 두 등식을 만족하는 행렬 B가 존재하면 행렬 A가 가역(invertible)이라고 한다.

$$AB = I_n, \quad BA = I_n,$$

이때 이 행렬 B를 A의 역행렬(inverse of A)라고 부르고, A^{-1}로 표기한다. 위의 두 등식으로부터, 정사각행렬들만이 가역행렬이 될 수 있으며 가역행렬과 그 역행렬의 크기는 서로 같다는 것을 알 수 있다.

5. 정사각행렬 A가 가역인 경우 그 역행렬 A^{-1}은 행렬 곱하기 연산에 대해 A의 역원(multiplicative inverse)이 된다.

예 1.5.3.

1. 크기가 2×2인 행렬 $A = [a_{ij}]$가 주어졌을때, A의 원소들로 만든 식 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$이 영이 아닌 것은 A가 가역이라는 것과 동치인 것이 알려져있다. 즉, 이 값이 영이 아니면 A가 가역이고, A가 가역이면 이 값은 영이 아니다. 다음을 확인해보자.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

2. 주대각원소 어느 하나도 영이 아닌 대각행렬은 가역이다. 이러한 행렬의 역행렬을 구해보자.

예 1.5.4. 역행렬에 관한 다음 성질들을 확인해보자.

1. 가역인 정사각행렬 A에 대해, 그 역행렬 A^{-1}은 다시 가역이고 A^{-1}의 역행렬은 A이다. 즉,

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

2. 크기가 같은 두개의 가역행렬 A와 B에 대해, 그 곱 AB은 가역이고 이 행렬의 역행렬은 $B^{-1}A^{-1}$과 같다. 즉

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

행렬 곱하기의 순서가 바뀌는 점에 주목하자.

제 2 장

일차 연립방정식과 기본 행연산

2.1 일차 연립방정식

미지수가 n개인 일차 방정식 m개로 이루어진 일차 연립방정식 또는 선형 연립방정식(system of linear equations)을 고려하자. 이 연립방정식을 푼다(solve)는 것은 주어진 모든 방정식을 동시에 만족하는 x_1, x_2, ..., x_n의 값 (해, solution)을 찾는 것이다.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

이를 다음 $m \times n$ 행렬 A, $n \times 1$ 행렬 X, $m \times 1$ 행렬 B를 이용하여

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

간단히 $AX = B$로 표기할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

이때 $m \times n$ 행렬 A를 주어진 일차 연립방정식에 대한 계수 행렬(coefficient matrix) 이라고 부른다.

종종 일차 연립방정식 $AX = B$에서 X를 생략하고, 계수 행렬 A와 방정식 우변의 상수에 해당하는 행렬 B를 붙여서 다음과 같이 쓰기도 하는데

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

이 행렬 $[A \mid B]$를 주어진 일차 연립방정식의 첨가행렬 (augmented matrix) 또는 확대행렬, 확장행렬이라고 한다.

2.2 가우스 소거법: 기본 행연산

우리가 일차 연립방정식 $AX = B$의 답을 어떻게 구하는지 그 과정을 잘 생각해보면 첨가행렬 $[A \mid B]$에 다음과 같은 종류의 변형들을 연속적으로 가하여 해당 방정식들을 점점 간단한 꼴로 만드는 것과 동일하다는 것을 알 수 있다.

1. 행렬의 i행에 0이 아닌 상수 k를 곱한다.

2. 행렬의 서로 다른 i행과 j행을 맞바꾼다.

3. 행렬의 어떤 i행에 0이 아닌 상수 k를 곱해서 얻은 것을 j행에 더한다.

행렬에 가하는 이러한 변형을 기본 행연산(elementary row operations)이라고 한다. 이렇게 변형하여도 관련 연립방정식의 해는 달라지지 않는다는 점에 주목하자.

예 2.2.1. 아래 일차 연립방정식의 해를 구하는 과정을 해당 첨가행렬의 연속적인 변형으로 표현해보자.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ 5x_1 - 5x_3 = 10 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{array}\right] \tag{2.2.1}$$

1. 1행에 (-5)를 곱하여 3행에 더한다.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ 10x_2 - 10x_3 = 10 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{array}\right]$$

2. 2행에 $1/2$를 곱한다.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ 10x_2 - 10x_3 = 10 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{array}\right]$$

3. 2행에 (-10)을 곱하여 3행에 더한다.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \quad x_3 = 0 \\ \qquad\quad x_2 - \ \ 4x_3 = 4 \\ \qquad\qquad\quad 30x_3 = -30 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 30 & -30 \end{array}\right]$$

4. 3행에 $1/30$을 곱한다.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \ x_3 = 0 \\ \qquad\quad x_2 - 4x_3 = 4 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = -1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

5. 3행에 4를 곱하여 2행에 더한다.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad\quad x_2 \qquad\ = 0 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = -1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

6. 3행에 (-1)을 곱하여 1행에 더한다.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \qquad\ = 1 \\ \qquad\quad x_2 \qquad\ = 0 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = -1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

7. 2행에 2를 곱하여 1행에 더한다.

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\quad = 1 \\ \qquad\quad x_2 \qquad\ = 0 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = -1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

이로부터 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, -1)$이 주어진 일차 연립방정식의 해가 되는 것을 알 수 있다.

이 예제에서 보여주는 기본 행연산을 이용한 일차 연립방정식 풀이법을 가우스 소거법(Gaussian elimination)이라고 한다. 특별히, 계수행렬을 상삼각행렬로 만드는 전반부 과정을 전진소거(forward elimination), 단위행렬로 만드는 후반부 과정을 후진소거(backward elimination)라고 부르기도 한다. 계수행렬이 정사각행렬이

아닌 경우에도 가우스 소거법을 사용할 수 있는데, 이에 대해서는 선형대수 등의 과목에서 자세히 배우기로 하자.

2.3 기본 행연산을 이용한 역행렬 계산

영이 아닌 실수 a에 대해 방정식 $ax = b$를 푸는 과정을 상기해보자. 양변에 영이 아닌 실수를 곱하여도 등호가 계속 성립하므로, 양변에 계수 a의 곱셈에 대한 역원 $1/a$을 곱하여 x값을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} ax &= b \\ \frac{1}{a}(ax) &= \frac{1}{a}b \\ \left(\frac{1}{a}a\right)x &= \frac{1}{a}b \\ x &= \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

이와 유사하게, 미지수와 방정식의 개수가 동일한 일차 연립방정식 $AX = B$을 행렬에 관한 방정식으로 간주하여 풀 수 있다. 계수행렬 A가 가역인 경우 역행렬이 존재하고 이를 양변에 곱해줄 수 있으므로,

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ \left(A^{-1}A\right)X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B. \end{aligned}$$

따라서 계수행렬이 가역인 경우 그 역행렬을 우변에 곱하여 쉽게 일차 연립방정식의 해를 구할 수 있다. 그럼 기본 행연산을 이용하여 주어진 행렬의 역행렬을 구하는 법을 알아보자.

1. 다음 3×3 행렬의 역행렬을 구하기 위해,

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -12 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{2.3.1}$$

우선 이를 같은 크기의 단위행렬과 나란히 놓는다.

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 0 & -12 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. 목표는 이 3×6 행렬에 기본 행연산을 연속적으로 적용하여 현재 A가 위치한 왼쪽 3×3 구역의 정사각행렬 부분을 단위행렬로 만드는 것이다. 이 작업이 성공할 경우 오른쪽 3×3 구역의 정사각행렬이 A의 역행렬이 된다. 즉

$$[A \mid I_3] \;\to\to\; \cdots \;\to\; \left[I_3 \mid A^{-1}\right].$$

3. 이를 위해 먼저 1행과 3행을 교환하고

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -12 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

4. 1행을 (-3)배하여 2행에 더해준다.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 0 & 1 & -3 \\ -5 & 0 & -12 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

5. 1행을 5배하여 3행에 더해준다.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

6. 3행을 $1/3$배 하고

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \end{array}\right]$$

7. 3행을 (-3)배와 10배 하여 각각 1행과 2행에 더해준다.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} & 1 & \frac{41}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \end{array}\right]$$

8. 이제 왼쪽이 단위행렬로 되었음을 확인하고, 오른쪽에서 A의 역행렬 A^{-1}을 찾는다.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ \frac{10}{3} & 1 & \frac{41}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

제 3 장

행렬식과 크래머 공식

3.1 행렬식의 정의

크기가 $n \times n$인 모든 실수 행렬들의 집합을 정의역으로 실수를 공역으로 갖는 다음 함수 det를 계산적으로 정의하고자 한다.

$$\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto \det(A).$$

행렬 A에 부여되는 이 함수의 함수값을 A의 행렬식 (determinant)이라고 하고, $\det(A)$ 또는 경우에 따라 $\|A\|$로 표기한다.

1. 가장 기본적인 경우로 $n = 1$일때 1×1 행렬 $A = [a]$의 행렬식은 자신의 원소 a로 정의한다.
$$\det(A) = a.$$

2. 양의 정수 $n \geq 2$에 대해, $n \times n$ 행렬 $A = [a_{ij}]$의 행렬식은 다음과 같이 귀납적으로 (recursively) 정의한다.

   a) 행렬 $A = [a_{ij}]$ 에서 i행과 j열을 지우고 얻은 $(n-1) \times (n-1)$ 행렬의 행렬식을 M_{ij} 라고 하자. 행렬 A의 (i, j) 요소의 여인수(cofactor)를 다

음과 같이 정의한다.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{3.1.1}$$

b) 이를 이용하여 $n \times n$ 행렬 A의 행렬식은 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n} \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - \cdots + \\ &\qquad (-1)^{1+(n-1)}a_{1n-1}M_{1n-1} + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}.\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

3. 식 (3.1.2)을 행렬 A의 제 1행에 의한 또는 1행으로의 <u>여인수 전개</u>(cofactor expansion along the first row)라고 부른다.

4. 이에 의하면 2×2 행렬의 행렬식은 다음과 같다. 매우 유용하니 기억하는 것이 좋다.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \det(A) = ad - bc.$$

Example 1.5.3을 참고하자.

예 3.1.1. 다음 3×3 행렬의 행렬식을 구해보자.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}.$$

1. 행렬 A의 1행에 의한 여인수 전개를 하기 위해, 1행과 j열을 지워서 얻은 2×2 행렬의 행렬식들을 구하자.

$$M_{11} = \begin{Vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{Vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{Vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{Vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{Vmatrix}$$

2. 행렬 A의 $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$ 요소의 여인수는 다음과 같다.

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}, \quad C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12},$$
$$C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13}.$$

3. 이로부터, A의 행렬식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\det(A) &= \alpha C_{11} + \beta C_{12} + \gamma C_{13} \\ &= \alpha M_{11} - \beta M_{12} + \gamma M_{13} \\ &= \alpha\left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right) - \beta\left(a_1 b_3 - a_3 b_1\right) + \gamma\left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right).\end{aligned}$$

일반적으로 $n \times n$ 행렬 $A = [a_{ij}]$에 대해 다음이 성립한다. 임의의 i, j 에 대해,

1. A의 i행에 의한 여인수 전개는 A의 j행에 의한 여인수 전개와 같다.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} C_{jk}.$$

2. A의 i열에 의한 여인수 전개는 A의 j열에 의한 여인수 전개와 같다.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} C_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} C_{kj}.$$

3. A의 i행에 의한 여인수 전개는 A의 j열에 의한 여인수 전개와 같다.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} C_{kj}.$$

예 3.1.2. 다음 행렬의 행렬식을 구해보자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. 우선 1행에 의한 여인수 전개를 얻기 위해 부분행렬들의 행렬식을 계산하고

$$M_{11} = \left\|\begin{matrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{matrix}\right\| = 1 - (-2) = 3,$$

$$M_{12} = \left\|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix}\right\| = 2 - 3 = -1,$$

$$M_{13} = \left\|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{matrix}\right\| = -4 - 3 = -7$$

이로부터

$$\det(A) = M_{11} - 2M_{12} + (-1)M_{13} = 3 - 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-7) = 12.$$

2. 이제 2열에 의한 여인수 전개를 얻기 위해 부분행렬들의 행렬식들을 계산하고

$$M_{12} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix} = 2 - 3 = -1,$$

$$M_{22} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix} = 1 - (-3) = 4,$$

$$M_{32} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix} = 1 - (-2) = 3.$$

이로부터

$$\det(A) = -2M_{12} + 1 \cdot M_{22} - (-2)M_{32} = -2 \cdot (-1) + (4) - (-2) \cdot 3 = 12.$$

예 3.1.3. 다음 행렬의 행렬식을 구하시오.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

어떤 행이나 열에 의해 여인수 전개를 하여도 동일한 결과를 얻는다. 하지만 계산의 편리를 위해 0이 제일 많은 행이나 열을 선택하는 것이 좋을테니, 4행에 의한 여인수 전개를 이용하여 행렬식을 계산하자.

$$\begin{aligned} \det(A) &= -M_{41} + (-4)M_{44} \\ &= -\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{Vmatrix} - 4\begin{Vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{Vmatrix} \\ &= -\left(\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}\right) - 4\left(-\begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 6 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}\right) \\ &= -(-16 - 2) + 4(-8 + 12) = 18 + 16 = 34. \end{aligned}$$

3.2 행렬식의 성질

1. 정사각행렬 A의 한 행에 0이 아닌 상수 k를 곱해서 얻은 행렬을 B라고 하면,
$$\det(B) = k\det(A). \tag{3.2.1}$$

2. 정사각행렬 A의 임의의 서로 다른 두 행을 맞바꾸어서 얻은 행렬을 B라고 하면,
$$\det(B) = -\det(A). \tag{3.2.2}$$

3. 정사각행렬 A의 어떠한 서로 다른 두 행이 같거나, 어떤 행이 다른 행의 상수배이면
$$\det(A) = 0. \tag{3.2.3}$$

4. 정사각행렬 A의 한 행에 0이 아닌 상수 k를 곱해서 다른 행에 더하여 얻은 행렬을 B 라 하면,
$$\det(B) = \det(A). \tag{3.2.4}$$

5. 정사각행렬 A와 그 치환행렬의 행렬식은 같다.
$$\det(A) = \det(A^T).$$
따라서 앞서 행에 대해 기술하였던 행렬식의 성질들은 열에 대해서도 동일하게 성립한다.

6. 일반적으로 두 정사각행렬의 합 $A+B$의 행렬식은 각 행렬식들의 합 $\det(A)+\det(B)$와 같지 않다. 하지만 곱 AB의 행렬식은 각 행렬식들의 곱과 같다.
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

7. 위에서, 실수 곱하기의 교환법칙을 사용하면 $\det(A)\det(B) = \det(B)\det(A)$이므로 두 행렬곱 AB와 BA의 행렬식들이 서로 같음을 알 수 있다.
$$\det(AB) = \det(BA).$$

8. 상삼각 또는 하삼각행렬 A의 행렬식은 그 주대각 원소들의 곱과 같다.
$$\det(A) = (A)_{11}(A)_{22}\cdots(A)_{nn}. \tag{3.2.5}$$

9. 단위행렬은 대각행렬로 상삼각이자 하삼각이므로 위의 공식을 이용하여 행렬식을 구할 수 있다.
$$\det(I_n) = 1.$$

10. 가역인 $n \times n$ 행렬 A에 대해 $A^{-1}A = I_n$의 양변에 행렬식을 취하면 다음 등식이 성립한다.
$$\det(A^{-1}A) = \det(I_n)$$
$$\det(A^{-1})\det(A) = 1.$$
이로부터 가역인 행렬의 행렬식은 영이 될 수 없다는 것을 알 수 있고, 역행렬의 행렬식은 원래 행렬 행렬식의 역수라는 것도 쉽게 알 수 있다.
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

11. 앞서 보인 조건문 '행렬이 가역이면 행렬식은 영이 아니다'의 역(converse)도 성립한다는 것이 알려져있다. 즉, 정사각행렬의 행렬식이 영이 아니면 이 행렬은 가역이다. 따라서 행렬 A가 가역인 것과 그 행렬식 $\det(A)$가 영이 아니라는 두 조건은 서로 동치이다.

3.3 행렬식 계산연습

예 3.3.1. 다음 행렬의 행렬식을 구해보자. 둘째와 셋째 열에서 첫째 열을 빼준다. 이렇게 얻은 행렬의 행렬식은 원래 행렬의 행렬식과 동일하다 (식 (3.2.4)). 이로부터 쉽게 행렬식이 영임을 알 수 있다 (식 (3.2.3)).

$$\begin{Vmatrix} x & x+a & x+a \\ y & y+a & y+a \\ z & z+a & z+a \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x & a & a \\ y & a & a \\ z & a & a \end{Vmatrix} = a^2 \begin{Vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{Vmatrix} = 0.$$

예 3.3.2. 다음 행렬의 행렬식이 영이 아닌 k일때

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{Vmatrix} = k$$

아래 행렬들의 행렬식을 k로 나타내보자.

$$A = \begin{bmatrix} 2a & b & c \\ 6\alpha & 3\beta & 3\gamma \\ 2x & y & z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x-a & y-b & z-c \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3(a+\alpha) & 3(b+\beta) & 6(c+\gamma) \\ \alpha & \beta & 2\gamma \\ x-a & y-b & 2(z-c) \end{bmatrix}.$$

1. $\det(A)$.

$$\begin{Vmatrix} 2a & b & c \\ 6\alpha & 3\beta & 3\gamma \\ 2x & y & z \end{Vmatrix} = 2 \begin{Vmatrix} a & b & c \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \\ x & y & z \end{Vmatrix} = 2 \cdot 3 \begin{Vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{Vmatrix} = 6k.$$

2. $\det(B)$.

$$\begin{Vmatrix} -a & -b & -c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x-a & y-b & z-c \end{Vmatrix} = - \begin{Vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x-a & y-b & z-c \end{Vmatrix} = - \begin{Vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{Vmatrix} = -k.$$

3. $\det(C)$.

$$\begin{aligned}\begin{Vmatrix}3(a+\alpha) & 3(b+\beta) & 6(c+\gamma)\\ \alpha & \beta & 2\gamma\\ x-a & y-b & 2(z-c)\end{Vmatrix} &= 3\begin{Vmatrix}a+\alpha & b+\beta & 2(c+\gamma)\\ \alpha & \beta & 2\gamma\\ x-a & y-b & 2(z-c)\end{Vmatrix}\\ &= 3\cdot 2\begin{Vmatrix}a+\alpha & b+\beta & c+\gamma\\ \alpha & \beta & \gamma\\ x-a & y-b & z-c\end{Vmatrix} = 6\begin{Vmatrix}a & b & c\\ \alpha & \beta & \gamma\\ x-a & y-b & z-c\end{Vmatrix} = 6\begin{Vmatrix}a & b & c\\ \alpha & \beta & \gamma\\ x & y & z\end{Vmatrix}\\ &= 6k.\end{aligned}$$

예 3.3.3. 여인수 전개를 사용하지 않고 행렬식의 성질만을 이용하여 다음 행렬의 행렬식을 계산해보자.

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ b+c & c+a & a+b\end{bmatrix}$$

식 (3.2.4)를 떠올려보자. 해당 기본 행연산을 적용하여 동일한 두개의 행을 만든 후 식 (3.2.3)을 이용하자.

$$\begin{aligned}\begin{Vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ b+c & c+a & a+b\end{Vmatrix} &= \begin{Vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a+b+c & c+b+a & a+b+c\end{Vmatrix}\\ &= (a+b+c)\begin{Vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ 1 & 1 & 1\end{Vmatrix} = (a+b+c)\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

예 3.3.4. 여인수 전개를 사용하지 않고 행렬식의 성질만을 이용하여 다음 행렬의 행렬식을 계산해보자.

$$\begin{bmatrix}-2 & 2 & -6\\ 5 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}.$$

먼저, $(1,1)$ 원소를 1로 만들기 위해 1행과 3행을 바꾼다 (식 (3.2.2)). 새로운 1행의 (-5)배와 2배를 각각 둘째와 셋째 행에 더하여 $(2,1)$ 원소와 $(3,1)$ 원소를 영으로

만든다 (식 (3.2.4)).

$$\begin{Vmatrix} -2 & 2 & -6 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{Vmatrix} = - \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -6 \end{Vmatrix} = - \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 10 & -9 \\ 0 & -2 & -2 \end{Vmatrix}$$

다음으로, $(2, 2)$ 원소를 1로 만들기 위해 2행에 상수를 곱하고 (식 (3.2.1)), 둘째 행의 2배를 셋째 행에 더하여 $(3, 2)$ 원소를 영으로 만든다. 이제 상삼각행렬의 행렬식 공식을 이용할 수 있다 (식 (3.2.5)).

$$= (-1) \cdot 10 \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -9/10 \\ 0 & -2 & -2 \end{Vmatrix} = -10 \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -9/10 \\ 0 & 0 & -19/5 \end{Vmatrix} = (-10) \cdot 1 \cdot 1 \cdot -\frac{19}{5} = 38.$$

3.4 크래머 공식

미지수의 개수가 n 이고 방정식의 개수가 n 인 일차 연립방정식 $AX = B$ 생각해보자.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

이때 행렬 A 의 k 열을 상수행렬 B 로 바꿔서 얻은 행렬 $A_k[B]$ 를 이용하여

$$A_k[B] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

일차 연립방정식 $AX = B$ 의 해를 표현할 수 있는데, 이를 크래머 공식(Cramer's Rule)이라 부른다.

$$x_k = \frac{\det(A_k[B])}{\det(A)}, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

연립방정식의 해를 구하는 계산적인 측면에서는 앞서 소개한 기본 행연산을 이용하는 가우스 소거법에 비해 비효율적이나 여러 분야에서 응용되는 이론적 가치가 있다.

예 3.4.1. 다음 일차 연립방정식의 해를 크래머 공식을 이용하여 구하시오.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \phantom{x_1 - {}} x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_1 \phantom{{} - 2x_2} - x_3 = 2 \end{cases} \tag{3.4.1}$$

우선 관련 행렬식들을 구해보자.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6.$$

$$\det(A_1[B]) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-2)\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6.$$

$$\det(A_2[B]) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\det(A_3[B]) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -6.$$

이에 크래머 공식을 적용하면,

$$x_1 = \frac{\det(A_1[B])}{\det(A)} = \frac{6}{6} = 1, \quad x_2 = \frac{\det(A_2[B])}{\det(A)} = \frac{0}{6} = 0,$$
$$x_3 = \frac{\det(A_3[B])}{\det(A)} = \frac{-6}{6} = -1.$$

예 3.4.2. 식 (3.4.1)에 주어진 연립 방정식의 해를 가우스 소거법을 이용하여 다시 구해보자. 또한 식 (2.2.1)에 주어진 연립 방정식의 해를 크래머 공식을 이용하여 다시 구해보자.

3.5 여인수를 이용한 역행렬 계산

앞서 2.3장에서 기본 행연산을 이용하여 역행렬을 얻는 방법을 알아보았다. 크래머 공식을 잘 활용하면 가역행렬의 역행렬에 대한 공식을 얻을 수 있다. 이에 의하면, $n \times n$ 행렬 A의 행렬식이 영이 아닐 경우, 역행렬 A^{-1}의 (i, j) 요소는 다음과 같다.

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{C_{ji}}{\det(A)}.$$

분자에 있는 C_{ji}는 앞서 식 (3.1.1)에서 정의했던 여인수로, 행렬 A에서 j행과 i열을 지우고 얻은 $(n-1) \times (n-1)$ 행렬의 행렬식에 $(-1)^{j+i}$를 곱하여 얻은 값이다.

1. 다음 행렬의 역행렬을 이러한 방식으로 구해보자.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix} \tag{3.5.1}$$

2. 우선 행렬식이 영이 아님을 확인한다.

$$\det(A) = 76.$$

3. 여인수들을 계산한다.

$$\begin{aligned}
C_{11} &= (1)\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{Vmatrix} = 17, & C_{12} &= (-1)\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 5 \end{Vmatrix} = 6, & C_{13} &= (1)\begin{Vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & -2 \end{Vmatrix} = -18, \\
C_{21} &= (-1)\begin{Vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{Vmatrix} = -18, & C_{22} &= (1)\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 5 \end{Vmatrix} = 16, & C_{23} &= (-1)\begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{Vmatrix} = 28, \\
C_{31} &= (1)\begin{Vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix} = 7, & C_{32} &= (-1)\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = -2, & C_{33} &= (1)\begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix} = 6.
\end{aligned}$$

4. 행렬 A의 여인수들을 요소로 갖는 행렬을 <u>여인수 행렬</u>(cofactor matrix), 여인수 행렬의 전치행렬을 A의 <u>수반행렬</u>(adjugate matrix 또는 classical adjoint matrix)이라고 하고 $\mathrm{adj}(A)$라고 표기한다.

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 17 & -18 & 7 \\ 6 & 16 & -2 \\ -18 & 28 & 6 \end{bmatrix}$$

5. 수반행렬에 행렬식의 역수를 스칼라 곱하여 역행렬을 얻는다.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{76} \begin{bmatrix} 17 & -18 & 7 \\ 6 & 16 & -2 \\ -18 & 28 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17/76 & -9/38 & 7/76 \\ 3/38 & 4/19 & -1/38 \\ -9/38 & 7/19 & 3/38 \end{bmatrix}.$$

예 3.5.1. 앞서 2.3장에서 살펴본 기본 행연산 방법을 이용하여 식 (3.5.1)에 주어진 행렬의 역행렬을 다시 구해보자. 또한 식 (2.3.1)에 주어진 행렬의 역행렬을 여인수를 이용하여 다시 구해보자.