2인 제로섬 게임

고성은

안암 수학 강의록 시리즈
第5권

고려대학교 수학과

2인 제로섬 게임

고성은

Mathematics Subject Classification (2020): 91-A05

편집 및 발행: 고려대학교 수학과

발행일: 2024년 9월 (v 0.1)

이 책은 TEX과 Oblivoir 클래스를 사용해 조판하였다. 글꼴은 TeX Gyre Pagella, TeX Gyre Heros, Source Han Serif 및 Noto Sans를 사용하였다.

머 리 말

Werner Fenchel 이라는 기학학자의 마지막 저술의 머리말을 시작하는 구절이 다시 떠오른다.

> There exist many excellent books on non-Euclidean geometry. To add another one is motivated by the fact that...

이 책은 건국대학교 수학과에서 몇년 간 강의하면서 만들어나갔던 강의록을 정리한 것이다. 이 책은 선형계획법과 2인제로섬게임에 대한 것인데, 나는 이러한 것을 전공한 사람도 아니고 강의를 들은 적도 없다. 그러나 내가 독학하며 참고했던 책들은 대부분 내 욕심만큼 친절하지 않았다.

마침, 코로나 때문에 함께 모여서 공부하고 연구하기도 힘든 때이다... 그래, 그러면 잠시 연구를 접어두고 강의에 보다 더 충실하고 강의록도 충실하게 만들자. 그래, 내친 김에 강의록을 잘 정리하여 책으로 만들자. 그러다 보니 이 책이 되었다. 많이 모자라지만, 선형계획법을 공부하는 과정에서 내가 겪었던 이런 저런 어려움이 해결되어 있는, 이 책으로 독학을 할 때에는 굳이 다른 책을 참고할 필요가 없는 그런 책이기를 바란다. Fenchel 선생님의 말씀에 대해 수줍지만 답이 될 수 있으면 좋겠다.

내 강의를 수강하며 충실하지 못한 내 지식을 잘 참아 준 건국대 수학과 학생 여러분과, 선형계획법을 주제로 한 R&E 프로그램에 참여하여 나와 함께 선형계획법의 공부를 시작하였던 경기북과학고 학생 들에게 감사한다.

2021년 초여름

차 례

제 1 장

2인제로섬게임과 우세한 전략

가위 바위 보를 하는데 상대방이 가위를 낼 것을 알고 있었다고 생각해 보자. 이 때 내가 보를 내는 것보다는 가위를 내는 것이 더 낫고 또 가위를 내는 것보다는 바위를 내는 것이 더 낫다는 것을 알고 있다. 이처럼 어떤 판단이나 행위를 할 때 더 나은 방법이 있을 수 있는데 이 단원에서는 이와 같이 더 나은 방법이라는 것과 이를 게임에서 이용하는 방법에 대해 알아 본다.

이긴 사람이 진 사람의 꿀밤을 한대 때리기로 하고 행순이와 열식이가 가위바위보를 한다. 이와 같은 것을 **2인제로섬게임**이라고 한다. 두명이 하는 게임이므로 2인 게임이고, 한명이 꿀밤을 한대 벌면 상대방은 한대 잃는 셈이므로 제로섬(zero-sum) 게임이다.[1] 우리는 2인 게임만을 다룰 것이고 그 2인을 행순이와 열식이로 부르겠다. 이 가위바위보를 다음과 같은 행렬로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

이러한 행렬을 **지불행렬**이라고 한다.[2] 이 지불행렬에서 첫번째 행은 행순이가 가위를 내는 경우, 두번째 행은 행순이가 바위를 내는 경우, 세번째 행은 행순이가 보를 내는 경우를 나타낸다.[3] 또, 첫번째 열은 열식이가 가위를 내는 경우, 두번째 열은

1) 제로섬 게임을 영합게임이라고도 부르는데, 나에게는 어감이 좋지 않았다.
2) 이와 같이, 행렬과 2인 게임을 같은 것으로 볼 수 있다.
3) 각각의 행은 행순이의 전략을 나타낸다고 생각할 수 있다. 그래서 이름이 행순이이다.

열식이가 바위를 내는 경우, 세번째 열은 열식이가 보를 내는 경우를 나타낸다.[4] 행순이와 열식이가 모두 가위를 내면 꿀밤을 때리고 맞고가 없으므로 이 행렬의 $(1,1)$ 원소가 0 이고, 행순이가 바위를 내고 열식이는 보를 내면, 열식이는 꿀밤을 한대 때리고 행순이는 맞게 되므로 이 행렬의 $(2,3)$ 원소가 -1 이다. 그러므로 지불행렬의 어떤 원소가 양수라는 것은 행순이에게는 그만큼 이득이고 열식이에게는 그만큼 손해가 됨을 나타낸다. 가위바위보를 한 번 할 때마다 행순이와 열식이는 가위, 바위, 보 중에서 하나를 내게 될 텐데 이를 행순이와 열식이 각각의 **전략**이라고 한다. 가위, 바위, 보라는 용어를 사용하지 않고 좀더 형식적으로 말한다면, 첫번째 행(을 선택하는 것), 두번째 행(을 선택하는 것), 세번째 행(을 선택하는 것)이 행순이의 전략들이고 첫번째 열(을 선택하는 것), 두번째 열(을 선택하는 것), 세번째 열(을 선택하는 것)이 열식이의 전략들이다. 이 장에서는 행순이와 열식이가 **순수전략**을 택하는 경우에 대해서 생각해 보겠다. 순수전략이란 매번 같은 전략을 사용한다는 것으로서, 만일 행순이가 매번 가위만을 내기로 한다면, 이는 순수전략이고, 그 순수전략은 첫번째 행이다. 열식이가 두번째 열이라는 순수전략을 사용하기로 했다면 이는 매번 바위를 내기로 했다는 뜻이다.[5],[6]

이제, 행순이와 열식이가 지불행렬이 다음과 같도록 게임의 규칙을 바꾸기로 합의를 했다고 가정해 보자:[7]

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

행순이와 열식이가 순수전략 만을 택하기로 한다고 할 때, 열식이는 어떤 순수전략을 택하는 것이 가장 유리할까에 대해서 생각해 보자.

4) 각각의 열은 열식이의 전략을 나타낸다. 그래서 이름이 열식이이다. 이 행순이, 열식이는 김홍종 교수님의 아이디어인데 허락없이 사용하고 있다.

5) 꽤 재미있게 보았던 영화 중의 하나인 ⟨주유소 습격사건⟩에서 유오성이 "나는 한 놈만 패"라고 하니까 모두들 진저리를 친다. 아마도 순수전략이라는 고상한 단어보다는 "무식한" 전략이라고 하는 것도 괜찮을 거라고 생각해 보았다.

6) 순수전략이라는 것은, 여러번 하는 게임에서 매번 똑같은 전략만을 사용하는 것이라고 생각할 수도 있고, 단판 승부에서의 전략이라고 생각할 수도 있다.

7) 이 지불행렬이 알려주는 게임의 법칙은, 예를 들어서 행순이가 첫번째 행을 선택했을 때(가위를 냈을 때), 열식이가 첫번째 열을 선택하면(가위를 내면) 행순이는 열식이에게 1원을 주고(행순이가 꿀밤을 한대 맞고) 열식이가 두번째 열을 선택하면(바위를 내면) 행순이는 열식이에게 3원을 주고 (행순이가 꿀밤을 세대 맞고) 열식이가 세번째 열을 선택하면(보를 내면) 열식이가 행순이에게 1원을 준다(열식이가 꿀밤을 한대 맞는다)는 것이다.

당연히 열식이는 가능하면 작은 값을 얻으려 할 것인데, 두번째 열과 세번째 열을 비교해 보면,

$$\begin{aligned} \text{두번째 열의 첫번째 원소} &\leq \text{세번째 열의 첫번째 원소}, \\ \text{두번째 열의 두번째 원소} &\leq \text{세번째 열의 두번째 원소}, \\ \text{두번째 열의 세번째 원소} &\leq \text{세번째 열의 세번째 원소} \end{aligned}$$

이므로 세번째 열보다 두번째 열이 열식이에게 유리하다. 열식이의 입장에서, 두번째 열이 세번째 열보다 **우세한 전략**이라고 말한다. 열식이는 두번째 열이 세번째 열보다 우세한 전략이라고 것을 알았으므로 주어진 게임을 다음 게임과 같다고 생각하는 것이 현명하게 생각하는 것일 것이다.

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 0 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

즉, 보는 결코 내지 않고, 가위나 바위 중에서 하나 만을 내는 것이 열식이에게 유리한 전략이다. 한편 첫번째 열과 두번째 열 중에 어떤 것이 우세한 전략인지는 따질 수 없다.

이제, 위와 같이 간단히 나타낸 지불행렬에 대해서 행순이의 전략을 살펴보면, 행순이는 가능하면 큰 값을 얻으려 할 터인데,

$$\begin{aligned} \text{첫번째 행의 첫번째 원소} &\geq \text{세번째 행의 첫번째 원소}, \\ \text{첫번째 행의 두번째 원소} &\geq \text{세번째 행의 두번째 원소} \end{aligned}$$

이므로 행순이는 세번째 행은 선택하지 않을 것이다. 그보다는 첫번째 행을 선택하는 것이 유리하므로. 그래서 주어진 게임은 다음과 같이 더욱 간단한 게임과 같다고 생각하는 것이 현명하다.

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

한편, 지불행렬이 이와 같은 게임에서는 행순이와 열식이의 전략 중에서 우세한 전략이라는 것이 이제는 없으므로 더이상 간단한 게임으로 바꿀 수가 없을 것이다.

이와 같이 가장 유리한 전략이 어떤 것인지는 알 수 없겠지만

상대적으로 유리한 전략

은 알아낼 수 있고, 이러한 우세한 전략이라는 개념을 이용하면 주어진 게임을 보다 간단한 게임으로 바꿀 수 있음을 알 수 있다.

보기 1.1. 지불행렬이

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

인 게임에서 (행순이의 입장에서 보면) *4*행이 *2*행과 *3*행보다 우세하다. 그러므로 이 게임을 보다 간단하게 다시 나타낸다면

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

이다. 이 행렬에서는 이제 우세한 행을 따질 수 없다. 하지만 이번에는 열식이의 입장에서 보면, *2*열이 *3*열보다 우세하다. 그러므로 다음과 같이 더욱 간단한 게임으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

이제는 행들끼리의 우세를 따질 수 없고 열들끼리의 우세도 따질 수 없다. 그러므로 더이상 간단한 게임으로 나타낼 수는 없다.

보기 1.2. 다음 게임

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 7 & 5 & 10 \\ 15 & -4 & -5 \\ 5 & 0 & 10 \\ -5 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

에서 행순이는 어떤 전략을 택하고 열식이는 어떤 전략을 택하는 것이 서로에게 가장 유리할까를 알아 보자. 행들을 먼저 살펴 보았더니 *2*행이 *1*행, *4*행, *5*행보다 우세하다. 그러므로 *1, 4, 5*행을 제외하면

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & 10 \\ 15 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

이다. 이제 열들을 살펴 보았더니 *1*열보다 *2*열이 우세하므로 *1*열을 제외하면

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

이다. 다시 *2*행을 제외하면

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \end{bmatrix}$$

이고 다시 2열을 제외하면

$$\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

이다. 이 값은 처음 행렬의 $(2, 2)$ 원소이다. 즉, 행순이는 *2*행을 택하고, 또 열식이는 *2*열을 택하는 것이 서로에게 가장 유리하다[8)]

이 장을 시작할 때 등장했던 가위바위보를 나타내는 지불행렬은 3×3 행렬이었다. 그러므로 가위바위보는 3×3 게임이다. 이처럼 $m \times n$ 지불행렬로 표시되는 게임을 $m \times n$ 게임이라고 부른다.[9)]

지금까지 우리는 게임을 하는 사람들이 각각 가장 좋은 선택을 할 것이라고 생각했다. 이와 같이 게임을 하는 사람들이 각각 가장 좋은 선택을 하려고 애쓸 것이라는 것은 **게임이론의 기본적인 가정** 중의 하나이다.

연습문제

1. 지불행렬을 만들어라.

   a) 친구 한 명과 각각 동전을 던져서 나온 면이 일치하면 내가 100원 따고 나온 면이 일치하지 않으면 친구가 100원 딴다.

8) 열식이의 입장에서는 5원을 잃는 것이 최선의 결과가 된다. 그러므로 이 게임은 열식이에게는 불리한 게임으로서 공평한 게임이 아니라고 할 수 있다.
9) 그러니까 $m \times n$ 게임에서 행순이에게는 m 가지의 전략이 있고 열식이에게는 n 가지의 전략이 있다.

b) 친구 한 명과 각각 동전을 던져서 두 동전이 모두 앞 면이 나오면 친구가 200원 따고, 두 동전이 모두 뒷면이 나오면 친구가 100원 따며, 내 동전이 앞면이 나오고 친구의 동전이 뒷면이 나오면 내가 100원 따고 내 동전이 뒷면이 나오고 친구의 동전이 앞면이 나오면 내가 200원 딴다.

c) 칠수는 가, 나, 다 세 나라 중에서 한군데를 공격하려 하고, 만수는 세 나라 중에서 한 군데를 방어하려고 한다. 만일 만수가 방어하는 나라를 침공하면 칠수는 도토리 하나를 잃고, 방어하지 않는 나라를 침공하면 도토리 하나를 얻는다.

d) 칠수는 공군을 이용하여 공격할까 해군을 이용하여 공격할까 생각 중이고 만수는 공군으로 막아야 하나 해군으로 막아야 하나 아니면 공군과 해군의 합동군으로 막아야 하나를 고민 중이다. 만일 칠수가 공격했을 때 방어군이 없으면 도토리 100개를 얻고, 합동군을 만나면 도토리 50개를 잃고, 공군이 공군을 만나거나 해군이 해군을 만나면 200개를 잃는다.

2. 옛 로마 시대에서도 했다고 하는 Mora 라는 게임은 두 명이 하는 게임이다. 각각이 손가락 하나 또는 두개를 펴는 동시에 상대방은 상대방이 손가락 하나를 펼 지 두개를 펼 지를 말한다. 만일 두 명의 예측이 모두 맞거나 모두 틀리면 무승부이고 어떤 한 명의 예측이 옳고 다른 한 명의 예측이 틀리면, 옳은 예측을 한 사람이 이긴다. 그래서 진 사람이 이긴 사람에게 몇 개의 도토리를 주는데, 도토리의 개수는 이긴 사람이 펼친 손가락의 개수와 예측한 손가락의 개수의 합이다. 이 게임을 행순이와 열식이가 한다고 하자. 다음 표에서 $[s, t] =$ [펼치는 손가락 수, 외치는 손가락 수] 이고, 왼쪽 열은 행순이의 전략, 위쪽 행은 열식이의 전략을 나타내는데, 이 게임의 지불행렬을 나타낸 것이다. 이 표를 완성하여라.

	$[1,1]$	$[1,2]$	$[2,1]$	$[2,2]$
$[1,1]$	0	2	-3	0
$[1,2]$				
$[2,1]$				
$[2,2]$				

3. 손가락 3개로 Mora 게임을 한다. 앞의 문제는 손가락 2개로 하는 것이었다. 다음 지불행렬을 완성하여라.

	[1, 1]	[1, 2]	[1, 3]	[2, 1]	[2, 2]	[2, 3]	[3, 1]	[3, 2]	[3, 3]
[1, 1]	0	−2	−2	3	0	0	4	0	0
[1, 2]									
[1, 3]									
[2, 1]									
[2, 2]									
[2, 3]									
[3, 1]									
[3, 2]									
[3, 3]									

4. 우세한 전략을 이용하여 다음 게임을 더 간단한 게임으로 바꾸어라.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$　　b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 15 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ -3 & -10 & 10 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$　　d) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & -9 \\ -1 & -2 & -3 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 10 \\ 3 & -5 & -4 \end{bmatrix}$　　f) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

5. 물음에 답하여라.

a) 칠수전자와 만수컴퓨터는 건국PC를 독점적으로 판매하고 있다. 그런데 칠수전자는 보증제도를 도입했기 때문에 칠수전자에서 파는 건국PC가 조금 더 비싸다. 두 회사에서 건국PC를 할인해서 팔기 위해 시장조사를 해 보았더니 칠수전자의 가격과 만수컴퓨터의 가격이 다음과 같을 때 칠수전자의 시장점유율이 다음과 같았다.

		만수컴퓨터		
		90만원	100만원	110만원
	100만원	0.15	0.60	0.80
칠수전자	120만원	0.15	0.60	0.60
	130만원	0.10	0.20	0.40

칠수전자는 어떤 가격을 택하는 것이 좋을까?

b) 시장조사표가 다음과 같다면 칠수전자는 어떤 가격을 택하는 것이 좋을까?

		만수컴퓨터		
		90만원	100만원	110만원
	100만원	0.20	0.60	0.60
칠수전자	120만원	0.15	0.60	0.60
	130만원	0.10	0.20	0.40

c) 이차대전 당시, 연합군과 일본군은 New Guinea 를 차지하기 위해 싸우고 있었다. 정보에 의하면, 일본군의 일부가 New Britain 의 동쪽에 있는 Rabaul 항구로부터 New Britain 의 서쪽에 있는 Lae 로 이동할 예정인데, 이동 경로는 북쪽항로 남쪽항로 두 군데가 가능하였다. 북쪽항로는 항상 안개가 끼어 있어 시계가 좋지 않았고 남쪽항로는 맑아서 시계가 양호했다. 당시 연합군은 정찰기를 두 항로 중에 하나에 집중하여 일본군의 호위함대를 발견하는 즉시 폭격을 하려 하였다. 연합군은 어느 항로를 택하는가에 대한 결과를 다음과 같이 분석하였다. 여기에 있는 숫자는 폭격하는 날의 수이다.

		일본군의 전략	
		북쪽 항로	남쪽 항로
연합군의 전략	북쪽 항로	2	2
	남쪽 항로	1	3

어느 항로를 연합군에게 추천하겠는가? 또, 일본군에게는 어느 항로를 추천하겠는가?[10)]

d) 위의 문제에서 당시 연합군이 택할 수 있는 전략이 하나 더 있었다고 가정해 보자. 그것은 정찰편대를 분산하여 두 항로를 모두 정찰하는 것이고 그 결과의 분석표가 다음과 같았다고 가정하자.

		일본군의 전략	
		북쪽 항로	남쪽 항로
	북쪽항로	2	2
연합군의 전략	분산 정찰	1.5	1.5
	남쪽 항로	1	3

어느 항로를 연합군에게 추천하겠는가? 또, 일본군에게는 어느 항로를 추천하겠는가?

10) 이 사건은 이차대전 중에 실제로 있었던 것이며 실제로 연합군과 일본군은 정답을 택했었다고 한다.

6. 2인 게임에서 우세한 전략이라는 개념을 이용하여 더 간단한 게임으로 바꾸어나갈 때, 행순이의 전략을 먼저 생각하거나 열식이의 전략을 먼저 생각하거나의 순서에 상관없이 바꾸어진 간단한 게임은 같아짐을 보여라.

제 2 장

최대최소전략과 결정된 게임

앞 장에서는 순수전략 중에서 어떤 전략이 보다 나은 전략이 될 수 있는지를 알아 보았다. 이를 바탕으로 하여 주어진 게임을 보다 간단한 게임으로 바꿀 수 있었는데 보기에서 다룬 게임 중에는 1×1 게임으로 바꾸지 못한 것도 있었다. 이 단원에서는 이러한 게임에서는 어떤 전략을 사용하는 것이 현명한 생각이 될지를 알아보겠다.

2.1 최대최소전략

앞 장에서 우세한 전략이라는 개념을 사용하여 주어진 게임을 보다 간단한 게임으로 바꾸었는데, 보기에서 다룬 게임 중에는 1×1 게임으로 바꾸지 못 한 것도 있었다. 이번에는 다음 게임을 살펴 보자.

$$\begin{bmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

이 지불행렬의 행들을 살펴보면 다른 행보다 우세한 행도 없고, 열들을 살펴보아도 다른 열보다 우세한 열이 없으므로 우세한 전략이라는 개념을 사용하여 이 게임을 더 간단한 게임으로 바꿀 수가 없음을 알 수 있다. 그러므로 이제 다음과 같은 의문이 생길 것이다:

> 우세한 전략이라는 것을 이용하여 주어진 게임을 보다 간단한 게임으로 바꿀 수가 없고, 결과적으로 1×1 게임으로 바꿀 수가 없다고 하더라도, 가장 좋은 순수전략을 알아낼 수 있는가? 알아 낼 수 있다면 어떻게 알아 낼 수 있는가?

이 질문에 답하기 전에 우선 다음과 같은 가정을 하자.

게임이론의 기본적인 가정[1)]

1. 게임에 참가한 각각은 최선의 전략을 택한다.
2. 각각의 참가자는 상대방이 최선의 전략을 택한다는 사실을 안다.

그러면, 최선의 전략이란 무언가? 위의 게임을 행순이의 입장에서 살펴보면, 행순이가 얻을 수 있는 가장 큰 이득은 1행 3열의 원소인 3 이므로, 행순이는 첫번째 전략(1행)을 선택할 지도 모른다. 그런데, 행순이가 가장 큰 이득을 얻는다는 것은 열식이에게는 가장 큰 손해가 가는 것이므로 아마도 열식이는 세번째 전략(3열)은 택하지 않을 것이고 그렇다면 행순이가 가장 큰 이득 3을 얻는 것은 거의 불가능할

1) 간단히 말해서, 게임의 참가자 각각이 똑똑할 것이라는 가정이다. 앞 단원의 마지막 부분에서 언급했던 가정보다 더 자세하다.

것이다..... 그러니까 행순이는 생각한다. '음, 가장 큰 이득을 얻으려는 전략은 (게임이론의 기본적인 가정을 인정한다면) 실현이 가능한 좋은 전략이 아닐 것이고, 그렇다면 나에게 돌아올지 모르는 손실을 가장 작게 할 수 있는 전략이 오히려 실현 가능한 전략 중에서 가장 좋은 전략이 되겠구나!' 다시 말하면,

손실을 가장 적게 만드는 전략

이 (행순이의 입장에서) 최선의 전략이 될 것이라는 것이다. 이와 같은 전략을 행순이의 **최대최소 순수전략**[2)]이라고 부른다. 이 최대최소 순수전략이 행순이의 최선의 전략이다. 그러므로 다음과 같은 과정을 통하여 행순이는 최선의 전략[3)]을 알아낼 수 있다.

행순이의 최대최소 순수전략

1. 각각의 행벡터에서 최소값을 표시한다.
2. 이 최소값이 가장 큰 행벡터를 택한다. 그 행벡터가 행순이의 최선의 전략이다.

행순이의 이득은 열식이에게 손해이고, 행순이의 손해는 열식이에게 이득이 된다. 그러므로 열식이는 최소가 최대가 되도록 하는 전략을 택하지 않고 (이건 행순이에게 최선의 전략이므로 열식이에게는 최악의 전략이 될 것이다) 최대가 최소가 되도록하는 전략을 택할 것이다. 이것을 열식이의 **최대최소 순수전략**[4)]이라고 하며,

2) 최대최소란 합성어의 앞에 들어있는 "최대"란 가능한 가장 "큰" 손해를 말하고, 뒤에 들어있는 "최소"란 그 손해를 가장 "작게"를 말하고 있다고 생각하면 된다.

3) 그러니까 예상되는 손실을 가장 작게 만드는 전략이 최선의 전략이다.

4) 지불행렬을 놓고 보았을 때, 행순이는 각 행벡터의 최소 성분들 중에서 가장 큰 값을 갖는 행을 택하는 것이 행순이의 최대최소 순수전략이었다. 즉, 작은 것 중에서 가장 큰 것을 택하는 것이다. 다시 말하면 최소 중에서 최대를 택한다는 것이다. 그러니까 우리말의 어순을 따르면 최소최대라고 해야 할 것이다. 반면에 열식이의 입장에서는 각 열벡터의 최대 성분 중에서 가장 작은 값을 갖는 열을 택하는 것이 최대최소 순수전략이다. 즉, 최대 중에서 최소를 택하는 것이므로 다시 우리말의 어순을 따르면 최대최소인 전략이다. 하지만 영어는 우리말과 어순이 다르다. 최대(maximum) 중에서 최소(minimum)를 택한다면 min-max 라고 해야 올바르다. 상황이 이러하기에 행순이의 경우에 최대최소전략이라고 부르면 한편으로는 옳고 한편으로는 그르다. 열식이의 경우에도 마찬가지이다. 다시 상황이 이러하기에 우리는 행순이에게 가장 좋은 전략과 열식이에게 가장 좋은 전략을 모두 최대최소전략, 또는 최선의 전략이라는 이름으로 부르기로 하였다. 레마르크의 ⟨개선문⟩이라는 소설 중에 다음과 같은 말이 나온다. 무언가를 해야만 하지만 아무 것도 할 수 없는 상황에서는 아무 것도 하지 않는 것이 가장 좋은 방법이라고. 여러분도 동의하시는가?

이 전략이 열식이의 최선의 전략이 된다. 행순이의 경우와 마찬가지로 다음과 같은 과정을 통하면 열식이는 열식이의 최선의 전략을 알아낼 수 있다.

열식이의 최대최소 순수전략

1. 각각의 열벡터에서 최대값을 표시한다.
2. 이 최대값이 가장 작은 열벡터를 택한다. 그 열벡터가 열식이의 최선의 전략이다.

행순이와 열식이가 최선의 전략을 이렇게 택하는 까닭은 행순이와 열식이 모두가 상대편이 똑똑하다는 것을 알고 있기(가정하고 있기) 때문임을 다시 한 번 기억하기 바란다.[5)]

보기 2.1. 다음 게임

$$\begin{bmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

의 행순이의 최선의 순수전략을 찾아보면

$$\begin{aligned} \textit{1}\,\text{행에서 가장 작은 값} &\;:\; -4 \\ \textit{2}\,\text{행에서 가장 작은 값} &\;:\; -2 \\ \textit{3}\,\text{행에서 가장 작은 값} &\;:\; 0 \end{aligned}$$

이므로 행순이의 최선의 순수전략은, 가장 작은 값이 가장 큰 *3*행을 택하는 것이다. 이번에는 열식이의 최선의 순수전략을 찾아보면

$$\begin{aligned} \textit{1}\,\text{열에서 가장 큰 값} &\;:\; 2 \\ \textit{2}\,\text{열에서 가장 큰 값} &\;:\; 0 \\ \textit{3}\,\text{열에서 가장 큰 값} &\;:\; 3 \end{aligned}$$

이므로 열식이의 최선의 순수전략은, 가장 큰 값이 가장 작은 2열을 택하는 것이다.

우세한 전략이라는 것을 이용하여 주어진 게임을 더 작은 게임으로 바꾼 다음 최선의 순수전략을 택하는 것이나 주어진 게임에 대해 처음부터 최선의 순수전략을 찾는 것이나 결과적으로는 같다. 다시 말해서, 최선의 순수전략을 찾기 위해 먼저 간단한 게임으로 바꿀 필요는 없다는 것이다. 먼저 다음 보기를 보자.

5) 만일 멍청이와 게임을 한다면 이런 전략은 아무 소용이 없게 된다.

보기 2.2. 앞 장의 마지막 보기 *1.2*

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 7 & 5 & 10 \\ 15 & -4 & -5 \\ 5 & 0 & 10 \\ -5 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

에서 행순이의 최선의 순수전략을 찾아보면

$$\begin{array}{rcr} \textit{1}\text{행에서 가장 작은 값} & : & -1 \\ \textit{2}\text{행에서 가장 작은 값} & : & 5 \\ \textit{3}\text{행에서 가장 작은 값} & : & -5 \\ \textit{4}\text{행에서 가장 작은 값} & : & 0 \\ \textit{5}\text{행에서 가장 작은 값} & : & -10 \end{array}$$

이므로 행순이의 최선의 순수전략은, 가장 작은 값이 가장 큰 *2*행을 택하는 것이다. 이번에는 열식이의 최선의 순수전략을 찾아보면

$$\begin{array}{rcr} \textit{1}\text{열에서 가장 큰 값} & : & 15 \\ \textit{2}\text{열에서 가장 큰 값} & : & 5 \\ \textit{3}\text{열에서 가장 큰 값} & : & 10 \end{array}$$

이므로 열식이의 최선의 순수전략은, 가장 큰 값이 가장 작은 *2*열을 택하는 것이다. 앞 장에서는 간단한 게임으로 줄여서 가장 유리한 전략을 찾았었는데, 두 방법의 결과가 일치한다.[6)]

보기 2.3. 앞 장에서 다루었던 변형된 가위바위보

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

에 대한 행순이와 열식이의 최선의 순수전략을 찾아보면

6) 행순이의 입장에서 본다면, 간단한 게임으로 줄이는 과정에서 5 를 갖고 있는 2행은 지워질 수가 없거나, 지워지더라도 5 라는 값은 변하지 않게 되기 때문이다. 만일 2행이 지원진다면 그 까닭은 2 행보다 우세한 전략이 있다는 것인데, 그 우세한 전략을 나타내는 행의 각각의 원소는 2행에 대응하는 원소보다 크거나 같아야 하므로 행순이의 최대최소 순수전략은 2행이 아니라 우세한 전략을 나타내는 행이어야 한다는 말이 된다. 아마도 다음처럼 생각하는 것이 더 나을지 모르겠다. 두 함수 f, g 에 대하여 정의역의 모든 점 x 에 대하여 $f(x) \le g(x)$ 이면, $\min f \le \min g$ 이다. 열식이의 입장에서 생각해도 마찬가지이다. 완벽한 논리는 아니지만 (왜일까?) 대충 이러한 까닭으로, 최대최소 순수전략을 찾기 위해서 먼저 간단한 게임으로 만들 필요는 없음을 알 수 있다....

- 행순이의 입장에서는 최소값이 가장 큰 행이 2행이므로 2행을 택하는 것이 최선의 전략이다.
- 열식이의 입장에서는 최대값이 가장 작은 열은 1열과 3열이므로 1열이나 3 열을 택하는 것이 최선의 전략이다.

앞의 보기에서 만일, 행순이와 열식이가 모두 최선의 순수전략을 사용한다면, 행순이는 매번 2행을 택할 것이고, 열식이는 매번 1열이나 3열을 택할 것인데 이 게임의 규칙을 따르면 행순이가 항상 3을 벌게 된다.[7)]

7) 행순이가 항상 벌게 되는 3이라는 수는 행순이의 최선의 전략인 2행과, 열식이의 최선의 전략인 1열이나 3열에 공통으로 놓여 있는 수임에 주의하여라.

2.2 안장점과 결정된 게임

다시 한 번 앞의 보기 2.3 을 살펴 보자. 열식이는 똑똑하기 때문에[8] 열식이는 다음과 같이 생각할 지도 모른다. '음, 그러니까 행순이는 최선의 순수전략 2행을 사용할 거다. 그러니까 나는 나의 최선의 순수전략인 1열이나 3열을 택하는 대신에 2열을 택해야지 되겠군!' 그래서 열식이는 잃는 것이 없게 된다. 그러나 잠깐, 행순이도 역시 똑똑하기 때문에[9] 열식이가 그렇게 생각해서 2열을 택할 것이라는 것을 안다. 그래서 행순이는 자신의 최선의 순수전략 대신에 3행을 택함으로써 다시 4를 얻을 것이다. 그러나 다시 잠깐, 열식이는 역시 행순이가 이렇게 생각할 것이라고 짐작하기 때문에 1열을 택함으로써 열식이가 거꾸로 3을 얻을 것이다. 하지만 또 잠깐, 행순이도 열식이에 못지 않게 똑똑하기 때문에 다시 2행을 택할 것이다..... 뭐야, 다시 처음의 행순이의 최선의 전략으로 돌아 왔잖아!!!

행순이와 열식이가 너무 똑똑하기 때문에, 행순이와 열식이의 전략의 밑받침이 되었던

예상되는 최악의 상황을 가장 덜 나쁘게 하기

는 결국 다람쥐 쳇바퀴 돌기 하는 상황을 만들어 버렸다. 사정이 이렇게 되고 만 까닭은 앞의 보기의 게임이 **안장점**을 가지고 있지 않은 게임이기 때문이다. 안장점이란, 다음 두 조건을 동시에 만족시키는 (게임의) 원소를 말한다.

- 행벡터의 원소 중에서 최소값이다.
- 열벡터의 원소 중에서 최대값이다.

앞의 보기 2.3 에서 다루었던 게임에 대해 행벡터의 최소의 원소들을 행벡터의 순서대로 나열하면

$$-3, \;\; 0, \;\; -3$$

이고 열벡터의 최대의 원소를 열벡터의 순서대로 나열하면

$$3, \;\; 4, \;\; 3$$

8) 게임이론의 기본적인 가정이다.
9) 역시 게임이론의 기본적인 가정이다.

인데, 처음에 나열된 수들과 나중에 나열된 수 들 중에서 같은 수가 없다. 그러므로 이 게임은 안장점을 갖고 있지 않다. 하지만 , 다음 게임

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

에서 행벡터의 최소의 원소를 행벡터의 순서대로 나열하면

$$-5, \quad -1, \quad -5, \quad -1$$

이고 열벡터의 최대의 원소를 열벡터의 순서대로 나열하면

$$4, \quad -1, \quad 2, \quad 4$$

이므로, 지불행렬의 2행 2열의 원소인 -1 과 4행 2열의 원소인 -1 이 이 게임의 안장점이다. 안장점이 두 곳에 있는데, 그 값은 같았다.[10)]

안장점이 있는 위의 게임에서 만일 행순이가 안장점을 가지고 있는 있는 2행이나 4행을 택하지 않고, 다른 행, 예를 들어서 3행을 택한다면, 3행의 원소 중에서 최소값은 -5 로서 이 값은 안장점의 값 -1보다 작으므로 안장점을 가지고 있는 전략을 택하는 것보다 더 큰 손해를 볼 수가 있다. 그러므로 행순이의 입장에서는 안장점을 가지고 있는 전략을 택하는 것이 보다 안전하다. 또, 같은 게임에서 만일 열식이가 안장점을 가지고 있는 2열을 택하지 않고 다른 열, 예를 들어서 3열을 택한다면 3열의 원소 중에서 최대값이 2이므로 2를 손해볼 수도 있다. 안장점을 가지고 있는 전략인 2열을 택한다면 최소한 1을 벌 수가 있었는데... 그러므로 열식이의 입장에서도 안장점을 가지고 있는 전략을 택하는 것이 보다 안전하다.

그러므로 안장점이 있는 게임의 경우에는 행순이나 열식이 모두에게 안장점을 가지고 있는 전략을 선택하는 것이 가장 안전한 최선의 전략이 될 것이고, 이런 게임에서는 똑똑한 행순이와 열식이 모두는 안장점을 가지고 있는 전략을 택하게 될 것이고 따라서 안장점의 값에 따라서 행순이와 열식이의 이익과 손해가 결정나게 된다. 따라서 안장점을 가지고 있는 게임을 **결정된 게임**이라고 부르고, 안장점의 값을 **게임의 가치**라고 부른다. 앞의 게임은 결정된 게임이며 게임의 가치는 -1 로서 행순이는 1을 잃고 열식이는 1을 버는 것이 이 게임에 대한 최선의 결과이다.

10) 이것은 항상 성립하는 사실로서 연습문제이다.

그러므로 결정된 게임으로서 게임의 가치가 0 인 게임을 **공평한 게임**이라고 부른다. 앞의 설명에서 이해할 수 있듯이, 게임의 가치가 양수이면 행순이에게는 유리하고 열식이에게는 불리한 게임이며, 게임의 가치가 음수이면 행순이에게는 불리하고 열식이에게는 유리한 게임이 된다.

앞의 보기 2.3 은 결정된 게임이 아니었기 때문에, 예상되는 행순이의 최선의 전략에 대해 열식이는 자신의 최선의 전략이 아닌 전략을 택함으로써 자신의 기대값을 낫게 할 수가 있었다.[11] 그러나 안장점이 있는 결정된 게임의 경우에는, 행순이와 열식이 둘 중에 한명은 안장점을 가지고 있는 전략을 택하고 다른 한명은 안장점을 가지고 있지 않은 전략을 택한다면, 안장점을 가지고 있지 않은 전략을 택한 사람은 안장점을 가지고 있는 전략을 택하는 것에 비하여 상대적인 손해를 보게 된다.

보기 2.4. 이제 여름도 거의 다 지나 갔으니 월동준비를 해야 할 때이다. 우리 집의 기름 탱크의 용량은 200 L 인데 현재 비어 있다. 지난 세월을 돌아보니 그해 겨울이 얼마나 추었는가에 따라서 기름의 사용량이 대략 다음과 같았다.

- 포근했던 겨울: 100 L • 보통의 겨울: 150 L • 매우 추웠던 겨울: 200 L

그런데 겨울의 추위에 따라서 기름값이 달라 졌는데 기름 $1L$ 의 가격이 대략 다음과 같았다.

- 포근했던 겨울: 1000 원 • 보통의 겨울: 1500 원 • 꽤 추웠던 겨울: 2000 원

지금 현재의 기름 가격은 1 L 에 1000 원인데 기름을 100 L 를 사 놓아야할 지 150 L 을 사 놓아야할 지 아니면 200 L 를 사 놓아야할 지 결정해야 한다. 그런데 문제는 내년 여름에는 이사를 갈 것이기 때문에 만일 이번 겨울에 기름을 다 사용하지 못하고 남는다면 남은 기름은 버릴 수 밖에 없게 된다는 것이다. 또다른 문제는, 친구들은 내가 편집증 증세를 보인다고 말들 하지만, 나는 대자연이 나에게 호의적이 아니라고 생각한다는 것이다. 아주 교활한 적이야... 그러니 기름이 모자라면 그 즉시 나를 얼어죽게 만들고 말거라구. 자, 어쩌면 좋을까?

이 게임을 하는 게이머는 나와 대자연이다. 내가 선택할 수 있는 전략은 100 L, 150 L, 200 L 이고 대자연이 선택할 수 있는 전략은 포근한 겨울, 보통 추위의 겨울,

11) 물론, 앞에서도 설명했듯이 행순이도 똑똑하기에 결국은 쳇바퀴처럼 돌다가 행순이와 열식이 모두 어떤 전략을 택해야할 지 모르게 되겠지만.

매우 추운 겨울이다. 내가 어쩌면 좋겠냐는 말은 결국 ''돈을 절약하기 위해서는" 어떻게 해야 하겠냐는 것일 것이고 그러니 지불행렬을 만들기 위해서는 여러 가지 경우에 따라 쓰게 될 기름값을 계산해야 할 것이다. 이제 지불행렬을 만들 것인데 내가 행순이이고 대자연이 열식이라고 하자. 그리고 다음과 같은 방식으로 계산하는 것이 합당할 것이다.

> 만일 내가 포근한 겨울을 예상하고 기름을 $100\,L$ 만 사 놓았는데 막상 그 겨울이 매운 추운 겨울이라면 나는 기름 $100\,L$ 를 추가로 사야 한다. 그러면 내가 기름값으로 사용한 비용은 처음 $100\,L$ 에 대해서는 $1\,L$ 에 1000 원씩 주고 사고, 더 필요한 $100\,L$ 는 $1\,L$ 에 2000 원 씩 주고 사야 한다. 매우 추운 겨울에는 기름값이 비싸 져서 $1\,L$ 에 2000 원이라고 하였다. 그러므로 이 경우의 기름값은
>
> $$100 \times 1000 + 100 \times 2000 = 300000.$$

이런 식으로 계산하여 각각의 경우에 대한 기름값을 계산하여 지불행렬을 만들면 다음과 같다. 단위는 1000 원이다.

	포근한 겨울	보통 겨울	매우 추운 겨울
100 L	-100	-175	-300
150 L	-150	-150	-250
200 L	-200	-200	-200

이 게임은 안장점을 갖는다. 그것은 지불행렬의 3 행 3 열의 원소이다. 그러니까 기름을 $200\,L$ 사 놓으면 되겠다.

하지만 포근한 겨울이나 보통의 겨울을 예상하고 $150\,L$ 의 기름을 사 놓아서 $50\,L$ 를 아끼는 것이 더 나을 거라고 생각되지는 않는가? 게임이론에 의하면 $200\,L$ 를 사 놓는 것이 가장 안전한 전략이지만, 이런 생각도 그럴 듯 하긴 하다. 사정이 이러한 것은 아마도 대자연이 영리하기 때문에 나를 최대한 괴롭히기 위하여 대자연도 최선의 전략을 택할 것이라고 가정했기 때문일 것이다. 그렇다. 정말로 대자연이 영리하다면, 혹시나 이번 겨울이 포근하거나 보통 추위의 겨울이 될 것이라는 바람은 잊고 최악을 대비하라는 것이 위의 풀이가 말하고 있는 바다.

지금까지의 설명을 다음과 같이 정리할 수 있다.

- 안장점이 여러개 있으면, 최선의 순수전략이 여러개 있게 되는데, 안장점의 값들이 모두 같으므로 어떤 최선의 순수전략을 선택하더라도 결과는 같게 된다.
- 만일 우세한 전략을 이용하여 게임을 간단한 게임으로 바꾸어 나갔더니 1×1 게임이 되었다면, 그 게임은 결정된 게임이다.

그러므로 우세한 전략을 이용하여 게임을 간단한 게임으로 바꾸어 나가다가 더이상 간단한 게임으로 바꿀 수 없더라도 걱정할 필요가 없다. 먼저 안장점이 있는가를 살펴보면 된다. 안장점이 있다면 그 안장점을 포함하는 전략을 택하는 것이 최선이다. 만일 안장점이 없으면 그 게임은 결정된 게임이 아니며, 게임이론의 기본적인 가정을 인정한 상태에서는 앞에서 살펴 보았듯이 뺑뺑 돌게만 될 뿐, 최선의 순수전략이라는 것은 존재하지 않게 된다.

연습문제

1. 행순이와 열식이가 최대최소전략를 사용할 때의 최선의 순수전략을 구하여라. 어떤 게임이 결정된 게임인가? 결정된 게임인 경우에는 그 게임의 가치를 구하여라.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -3 & -5 & -5 \\ -3 & -3 & -1 \\ -5 & -10 & -4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 4 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 10 \\ 5 & -5 & -4 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} -2 & -4 & 9 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 12 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 7 & -20 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ -16 & 0 & -0 & 16 \end{bmatrix}$

2. 물음에 답하여라.

   a) 앞 장의 연습문제 3 c)에서 지불행렬이 다음과 같았다.

		일본군의 전략	
		북쪽 항로	남쪽 항로
연합군의 전략	북쪽 항로	2	2
	남쪽 항로	1	3

      i. 이 게임은 결정된 게임임을 보여라. 양 쪽의 지휘관이 상대방이 최선의 전략을 사용할 것이라는 사실을 알고 있더라도 더 나은 전략을 고안해 낼 수 없음을 보여라.

      ii. 만일 지불행렬이 다음과 같다고 하더라도 같은 결론이 성립할까?

		일본군의 전략	
		북쪽 항로	남쪽 항로
연합군의 전략	북쪽 항로	4	1
	남쪽 항로	2	3

   b) 앞 장의 연습문제 3 d)에서 지불행렬이 다음과 같았다.

		일본군의 전략	
		북쪽 항로	남쪽 항로
	북쪽항로	2	2
연합군의 전략	분산 정찰	1.5	1.5
	남쪽 항로	1	3

      i. 이 게임은 결정된 게임임을 보여라. 양 쪽의 지휘관이 상대방이 최선의 전략을 사용할 것이라는 사실을 알고 있더라도 더 나은 전략을 고안해 낼 수 없음을 보여라.

      ii. 만일 지불행렬이 다음과 같다고 하더라도 같은 결론이 성립할까?

		일본군의 전략	
		북쪽 항로	남쪽 항로
	북쪽항로	5	1
연합군의 전략	분산 정찰	2	3
	남쪽 항로	1	4

3. 우세한 전략이라는 것을 이용하여 주어진 게임을 더 작은 게임으로 바꾼 다음 최선의 순수전략을 택하는 것이나 주어진 게임에 대해 처음부터 최선의 순수전략을 찾는 것이나 결과적으로는 같다. 이 사실을 증명하여라.

4. 우세한 전략을 이용하여 간단한 게임으로 바꾸었더니 1×1 게임이 되었다면 그 게임은 결정된 게임임을 보여라.

5. 안장점에 대한 다음 사실을 증명하여라.

   a) 안장점이 2개 이상 존재하여도 그 안장점의 값은 같다.

   b) i 번째 행벡터와 j 번째 열벡터가 교차하는 곳이 안장점이고 또 r 번째 행벡터와 s 번째 열벡터가 교차하는 곳이 안장점이면 i 번째 행벡터와 s 번째 열벡터가 교차하는 곳도 안장점이고 또 r 번째 행벡터와 j 번째 열벡터가 교차하는 곳도 안장점이다.

제 3 장

혼합전략

앞에서 최선의 순수전략에 대해 공부했는데, 결정된 게임에 대해서는 이런 좋은 전략이 있지만 결정된 게임이 아닌 경우에는 이런 전략이 있을 수 없음을 알았다. 그러니 이제 결정된 게임이 아닌 경우에는, 즉, 안장점이 없을 경우에는 어떻게 해야할지에 대해서 생각해 보는 것이 제법한 순서일 것이다. 그렇다면 순수전략이라는 것에 더이상 집착하지 않기로 하면 어떨까?

3.1 순수전략의 표현

지불행렬이

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

인 게임에서 행순이는 1행을 택하고 영식이는 2열을 택하면, 그 결과로서 a_{12} 를 얻게 되는데 이 값 a_{12} 는 행렬의 곱을 이용하여서 다음과 같이 계산할 수 있다:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a_{12}.$$

또, 행순이는 2행을 택하고 영식이는 3열을 택하면, 그 결과로서 a_{23} 를 얻게 되는데 이 값 a_{23} 은 다음과 같이 계산할 수 있다:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a_{23}.$$

그러므로 다음을 알 수 있겠다:

- 행순이의 순수전략은 어느 한 원소 만이 1 이고 나머지 원소는 0 인 행벡터로 나타낼 수 있으며
- 열식이의 순수전략은 어느 한 원소 만이 1 이고 나머지 원소는 0 인 열벡터로 나타낼 수 있고
- 순수전략을 사용한 게임의 결과는 행렬의 곱을 계산하여 알아낼 수 있다.

3.2 혼합전략

다음은 앞 단원의 보기 2.3 의 게임인데, 이 게임은 결정된 게임이 아니었다.

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

이 게임이 결정된 게임이 아니기에 행순이와 열식이 모두에게 마땅한 순수전략이 없음을 안다. 단판 승부를 하자고 하면 아마도 행순이와 열식이는 망설이게 될 것이다. 그래서 행순이와 열식이가 이 게임을 예를 들어서 60 번 하기로 합의하였다고 가정해 보자.

이제 행순이가 60 번 중에서 $\frac{1}{6}$ 은 1 행을 선택하고 $\frac{1}{2}$ 은 2 행을 선택하고 나머지 $\frac{1}{3}$ 은 3 행을 선택하는 전략을 세웠다고 생각해 보자. 이와 같은 전략을 **혼합전략**이라고 한다.[1] 지금 이 게임에서 행순이가 $\frac{1}{6}$ 은 1 행을, $\frac{1}{2}$ 은 2 행, $\frac{1}{3}$ 은 3 행을 선택하는 혼합전략을 택했는데, 이 전략을

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

와 같이 나타낸다.[2] 계속해서 한가지 선택 만을 고집하는 (순수)전략도 이처럼 행렬로 나타낼 수 있음에 주의하여라. 예를 들어, 2 행 만을 택하는 전략은

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

과 같이 나타낼 수 있다. 이 게임에서 열식이가 $\frac{1}{3}$ 은 1 열, $\frac{1}{6}$ 은 2 열, $\frac{1}{2}$ 은 3 열을 택하는 혼합전략을 선택한다면, 열식이의 이 혼합전략은

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1) 그러니까 여러번 선택을 할 수 있는 게임에 사용할 수 있는 전략이다. 여러번의 선택 중에서 특정한 행을 택하는 회수만을 생각했을 뿐 순서는 생각을 하지 않았음에 주의하여라. 예를 들어서 두 번 중에서 한 번은 1 행을 택하고 또 한 번은 2 행을 택하기로 하지만, 처음에 1 행을 택하는지 아니면 두번째에 1 행을 택하는지에는 관심이 없다는 말이다.

2) 예를 들어서, 60 번 중에 10 번은 1 행, 20 번은 2 행, 30 번은 3 행을 택한다는 뜻이다. 이때 순서에는 역시 관심이 없다. 이처럼 $m \times n$ 게임에서 행순이의 혼합전략은 각 원소가 0 보다 작지 않고 원소의 합이 1 이 되는 (각 원소는 확률을 나타내므로) $1 \times m$ 행렬로 표시된다.

와 같이 나타낼 수 있다.[3]

이제, 위의 게임의 지불행렬을 P 라고 하고 이 게임에서 행순이는 혼합전략 $\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 를, 그리고 열식이는 혼합전략 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 를 선택한다면, 행순이와 열식이는 평균적으로

$$\mathbf{u}^T P \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{9}$$

를 기대할 수 있다. 즉, 평균적으로 행순이가 $\frac{1}{9}$ 의 이득을 얻을 것이라고 예상할 수 있다. 이와 같이 예상되는 평균적인 이득 혹은 손실을 행순이의 혼합전략 $\mathbf{u}^T$ 와 열식이의 혼합전략 $\mathbf{v}$ 에 대한 **기대값**이라고 부른다.[4]

보기 3.1. 다음과 같은 가위바위보 게임에서 행순이는 반은 가위를, 나머지 반 중에서 반은 바위를, 나머지 반은 보를 내기로 작정했고 열식이는 계속 보만 내기로 작정했다고 한다. 누구의 작전이 유리할까를 알아 보자.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

행순이의 (혼합)전략은

$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

---

3) 이처럼 $m \times n$ 게임에서 열식이의 혼합전략은 각 원소가 0 보다 작지 않고 원소의 합이 1 이 되는 (각 원소는 확률을 나타내므로) $n \times 1$ 행렬로 표시된다. 원소의 각각의 성분이 ≥ 0 이고 그 원소들의 합이 1 이 되는 벡터를 **확률벡터**라고 부르기도 한다. 그러므로 행순이의 혼합전략은 확률행벡터로 표시되고 열식이의 혼합전략은 확률열벡터로 표시된다.

4) 고등학교 때 배운 기대값과 같은 것이다. 예를 들어서 지불행렬이 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ 이고 두번하는 게임에서 행순이가 순서까지 고려하여 첫번째는 1 행을, 두번째는 2 행을 택하는 전략을 짰고 열식이는 첫번째는 2 열을, 두번째는 1 열을 택하는 전략을 짰다면, 이들 전략에 대한 게임의 결과는 명확하다. 기대할 수 있는 값이 아니라 뻔한 값이라는 뜻이다. 이처럼 (순서를 생각하지 않는) 혼합전략에 대해서는 그 결과에 대하여 확률적으로 기대할 수 있는 값이 있을 수 밖에 없다.

이고 열식이의 (순수)전략은

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

이므로 이들의 전략에 대한 기대값을 계산하면

$$\mathbf{u}^T P \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}$$

즉, 행순이가 평균적으로 꿀밤을 $\frac{1}{4}$ 대 때리게 된다고 기대할 수 있다.[5)]

그러나, 만일 위의 게임에서 열식이가 행순이의 혼합전략 $\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ 을 사전에 알고 있었다고 가정해 보자. 그러면,

$$\mathbf{u}^T P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

이므로 열식이는

- 계속해서 가위만 내는 경우, $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ 이므로 평균적으로 본전이고
- 계속해서 바위만 내는 경우, $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}$ 이므로 평균적으로 $\frac{1}{4}$ 대의 꿀밤을 때리게 되며
- 계속해서 보만 내는 경우, $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}$ 이므로 평균적으로 $\frac{1}{4}$ 대의 꿀밤을 맞게 되므로

5) 열식이의 입장에서는 가위바위보를 한 번 할 때마다 평균적으로 $\frac{1}{4}$ 대의 꿀밤을 맞게 된다는 것이겠다.

똑똑한 열식이는 계속해서 바위를 냄으로써 평균적으로 $\frac{1}{4}$의 이득을 얻게 될 것이다.

이제 이 설명을 곰곰히 살펴보면, 행순이의 혼합전략에 대해 열식이가 순수전략으로 대응하기로 한다면, 가장 나은 순수전략이 존재하게 됨을 알 수 있다. 그 가장 나은 순수전략을 **최선의 순수대응전략**이라고 부른다.

정리 3.2.1. 상대방의 정해진 전략에 대한 최선의 순수대응전략이 존재한다.

상대방이 도중에 전략을 바꾸지 않는다는 가정을 한다면 최선의 순수대응전략이 존재한다는 말이다. 앞의 설명을 이해했다면 이 정리를 굳이 증명하지 않아도 된다는 것을 안다.

3.3 최선의 대응전략

게임이론의 기본적인 가정은 경기자 모두가 똑똑할 것이라는 건데, 상대방의 최선의 대응전략이 존재할 거라는 이 정리의 내용은 알지 못할 만큼만 똑똑할 거라는 건가? 그건 아니겠다. 이 정리가 주장하는 사실은 알 만큼 똑똑하다. 그러니까, 즉, 이 사실을 알고 있으므로 상대방의 최선의 순수대응전략에 대하여 가장 나은 전략은 어떤 것일 것인가에 대하여 고민하고 있을 것이다.

보기 3.2. 다음 게임에 대하여 위의 정리를 알고 있는 행순이에게 가장 유리한 전략과 역시 위의 정리를 알고 있는 열식이에게 가장 유리한 전략은 각각 무엇인지 알아보자.

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

행순이의 일반적인 전략은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix}, \quad 0 \le x \le 1$$

똑똑한 열식이는 순수전략으로 대응해 올 것이므로(위의 정리를 알고 있다) 열식이의 두가지 순수전략에 대한 기대값을 각각 계산해보면

1. 열식이의 순수전략 $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 에 대하여

$$E_1(x) = \mathbf{u}^T P \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -3x + 2$$

이므로 이때의 기대값은

$$E_1(x) = -3x + 2.$$

2. 열식이의 순수전략 $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 에 대하여

$$E_2(x) = \mathbf{u}^T P \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3x$$

이므로 이므로 이때의 기대값은

$$E_2(x) = 3x.$$

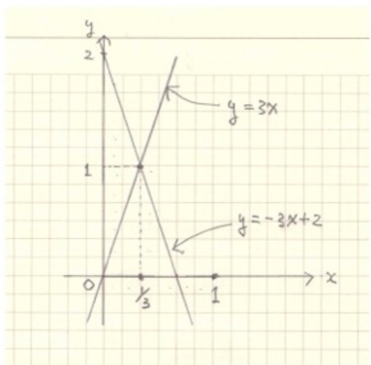
그러므로 x 값에 대한 최악의 결과는 $E_1(x),\ E_2(x)$ 중에서 작은 값

$$\min_{0 \le x \le 1} \{E_1(x), E_2(x)\}$$

임을 알 수 있다. 그런데 행순이는 최악의 결과가 가능하면 덜 나빠지도록 하는 전략을 택할 것이므로 행순이의 전략 $\boldsymbol{u}^T = \begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix}$ 에 대하여 예상되는 값은

$$E(x) := \max \min_{0 \le x \le 1} \{E_1(x), E_2(x)\} = 1$$

일 것이다.



그러므로 행순이에게 가장 유리한 전략은 $E(x) = 1$ 이 되도록 하는 값 $x = \frac{1}{3}$ 을 택하는 전략

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

일 것이고, 이때의 기대값은

$$E\left(\frac{1}{3}\right) = \max\min\left\{E_1\left(\frac{1}{3}\right), E_2\left(\frac{1}{3}\right)\right\} = 1$$

이므로 이 전략 $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ 은 행순이에게 최소한 1 이상의 값을 기대할 수 있게 한다고 생각할 수 있다.

이번에는 열식이의 입장에서 알아 보겠다.

열식이의 일반적인 전략은

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}, \quad 0 \le x \le 1$$

인데, 똑똑한 행순이는 순수전략으로 대응해 올 것이므로 행순이의 두가지 순수전략에 대한 기대값을 각각 계산해보면

1. 행순이의 순수전략 $\mathbf{u}_1^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 에 대하여

$$E^1(x) = \mathbf{u}_1^T P \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix} = -4x + 3$$

2. 행순이의 순수전략 $\mathbf{u}_2^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 에 대하여

$$E^2(x) = \mathbf{u}_2^T P \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix} = 2x$$

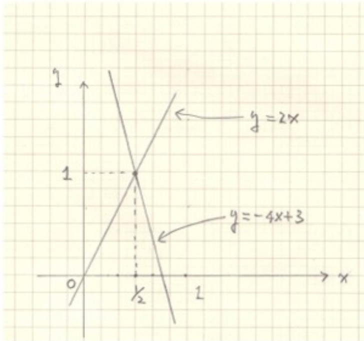
이므로 x 값에 대한 최악의 결과는 $E^1(x), E^2(x)$ 중에서 큰 값

$$\max_{0 \le x \le 1} \{E^1(x), E^2(x)\}$$

이다. 그런데 열식이는 최악의 결과가 가능하면 덜 나빠지도록 하는 전략을 택할 것이므로 열식이의 전략 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}$ 에 대하여 예상되는 값은

$$E(x) = \min \max_{0 \le x \le 1} \left\{E^1(x), E^2(x)\right\} = 1$$

이다.



그러므로 열식이에게 가장 유리한 전략은 $E(x) = 1$ 이 되도록 하는 값 $x = \frac{1}{2}$ 를 선택하는 전략 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 이고

$$E\left(\frac{1}{2}\right) := \min\left\{E^1\left(\frac{1}{2}\right), E^2\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = 1$$

이므로 이 전략은 열식이에게 최대한 1 이하의 값을 기대할 수 있게 한다고 생각할 수 있다.[6)]

이 보기의 풀이에서처럼, (상대방의 최선의 순수대응전략에 맞서서) 가능한 손실을 가장 적게 만드는 혼합전략을 **최선의 대응전략**이라고 말한다. 이 보기의 풀이에서 행순이의 최선의 대응전략에 대한 기대값과 열식이의 최선의 대응전략에 대한 기대값이 같았는데 이것은 일반적인 현상으로서 뒤에 나오는 심플렉스 방법을 이용하여 이 책의 후반부에서 증명하겠다. 주어진 게임에 대한 이 공통의 값을 **게임의 가치**라고 부른다. 위의 보기의 게임의 가치는 그러므로 1 이다. 특히, 게임의 가치가 0 인 게임은 **공평한** 게임이라고 한다.[7)] 보기의 게임은 공평한 게임이 아니다.

주어진 제로섬 게임에 대해서 행순이와 열식이의 최선의 대응전략이 있게 되고, 그 게임의 가치라는 것이 있게 된다. 이 세가지를 구하는 것은 **게임을 푼다**고 한다.

6) 그러니까 1 이상은 손해보지 않는다는 뜻.

7) 앞에서 순수전략을 설명할 때, 게임의 가치와 공정한 게임의 정의를 설명했는데, 잠시 생각해보면 여기에서의 정의가 거기에서의 정의를 포함함을 알 수 있다. "공정한" 게임과 "공평한" 게임이라... 의도적으로 다른 용어를 사용한 것은 아니고 그게 그거일 것 같아서 여기서는 이거, 저기서는 저거를 사용해 보았다.

연습문제

1. 지불행렬이 다음과 같은 게임에 대하여 주어진 행순이의 전략 S 와 열식이의 전략 T 에 대한 기대값을 계산하여라.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (d) $S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(e) $S = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ (f) $S = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2. 지불행렬이 다음과 같은 때, 주어진 행순이의 전략에 대한 열식이의 최선의 대응전략을 구하여라.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

(a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

3. 다음 게임을 풀어라.

$$\text{(a)}\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{(c)}\ \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(d)}\ \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

4. 전자기기를 만드는 공장을 확장하려고 하는데 다음 세 가지 방안이 있다.

   (1) 현재 위치에 그대로 있되 설비를 늘인다.

   (2) 지금 공장이 있는 도시의 외곽으로 이전한다.

   (3) 인건비가 더 싼 다른 도시로 이전한다.

   그런데 고려해야 할 사항이 다음 세가지가 있다.

   (i) 설비를 늘인다면 정부에서 자금을 지원해 줄 지 모른다

   (ii) 공장이 들어서게 될 지 모르는 시의 외곽에 큰 길이 생긴다는 소문이 있다.

   (iii) 실업율이 더 높은 곳으로 이전할 경우에 정부가 보조금을 지급할 거라는 소문이 있다.

   각각의 경우에 대한 비용을 조사해 보았더니 다음과 같았다.

		정부 정책		
		(i)	(ii)	(iii)
회사의 선택	(1)	200	155	145
	(2)	130	220	130
	(3)	118	118	225

   회사가 생각하기에 정부가 정책 (i)을 택할 확률이 0.2, (ii)를 택할 확률이 0.5, (iii)을 택할 확률이 0.3 이라면, 회사의 최선의 방안은 어떤 것일까?

5. 밀, 보리와 벼 중에서 어떤 것을 재배할까 고르려고 한다. 농사가 잘 될지는 올해의 날씨가 건조할 지, 보통일 지, 습할 지에 따라 결정된다. 이에 대한 지불행렬이 다음과 같다고 하자.

		날씨		
		건조함	보통	습함
작물	밀	23	18	10
	보리	13	16	20
	벼	11	20	21

건조할 확률이 0.1, 보통일 확률이 0.6, 습할 확률이 0.3 이라고 하면, 농부는 어떤 작물을 재배하여야 할까?

제 4 장

2×2 제로섬 게임의 풀이

이제 지금까지의 스토리를 돌이켜 보자. 우리는 먼저 순수전략이라는 것을 생각했었다. 행순이와 열식이가 모두 순수전략을 사용하기 위해서는 그 게임의 안장점이 있어야 한다. 안장점이 없는 게임에서는 순수전략이라는 것이 뜻하지 않은 손해를 끼칠 수 있음을 알고 있다. 그러니까 똑똑한 행순이와 열식이는 순수전략을 택하기 전에 먼저 그 게임에 안장점이 있는가를 확인한다. 그래서 안장점이 있으면 순수전략을 택할 것이고 그것이 가장 안전한 전략이 된다. 그런데 안장점이 없다면 혼합전략을 택하는 것이 보다 나을 뿐만 아니라 선택할 수 있는 수많은 혼합전략 중에서 상대방이 순수전략으로 대응해 올 때 가장 나은 혼합전략이 있다는 것을 또한 알고 있다. 그래서 똑똑한 행순이와 열식이는 상대방이 순수전략으로 대응해 올 것이라는 가정 아래에서 가장 나은 혼합전략을 택할 것이다. 그런데 앞의 단원의 게임에 대해서는 (상대방이 순수전략으로 대응해 올 것이라는 예상을 한) 행순이와 열식이의 각각의 가장 나은 혼합전략에 대한 기대값이 같았다. 보기를 교묘하게 골랐군! 그런데 보기가 교묘했던 것이 아니라 이러한 일이 항상 일어나는 일이라는 주장이 있었고 그 증명은 이 책의 후반부에 하겠다고 했다. 이 단원에서는 2×2 게임에 대해서 위의 주장을 살펴본다.

이제 일반적인 2×2 게임

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

을 풀 수 있음을 보이려 하는데, 먼저 혼합전략을 사용하지 않고 순수전략을 사용하게 되는 경우를 살펴 보자.

4.1 2×2 게임에서의 우세전략과 안장점

혼합전략을 사용하지 않고 순수전략을 사용하게 되는 경우는 행순이 또는 열식이 누군가에게 우세전략이 있거나, 안장점이 있는 경우일 것인데 다음 두 사실을 보이겠다.

- 행순이 또는 열식이 누군가에게 우세전략이 있으면, 안장점이 존재한다.
- 안장점이 있으면 행순이 또는 열식이 누군가에게 우세전략이 있다.

먼저, 행순이 또는 열식이에게 우세전략이 있는 게임에는 항상 안장점이 존재함을 보이겠다.

2×2 게임

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

에서 열식이에게 우세전략이 있다는 것은 $b - a$ 의 부호와 $d - c$ 의 부호가 같다는 것이므로[1)]

$$(b - a)(d - c) \geq 0$$

일 때이다. 먼저

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \quad {}^{2)}$$

라고 가정해 보자.[3)]

이제, $b \geq d$ 이거나 $b \leq d$ 일 터인데,

1) 물론, $a = b$ 이거나 $c = d$ 인 경우도 포함한다.
2) $a \geq b,\ c \geq d$ 라는 뜻.
3) 그래서 다음과 같은 약속을 하면 편하다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad a \geq b, \quad c \geq d, \\ \begin{bmatrix} a & c \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b & d \end{bmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad a \geq b, \quad c \geq d. \end{aligned}$$

(1) 만일 $b \geq d$ 이면, b 는 1행 $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ 의 원소 중에서 가장 작은 값인 동시에 2열 $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ 의 원소 중에서 가장 큰 값이므로, 안장점이다.

(2) 또, 만일 $b \leq d$ 이면, d 는 2행 $\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$ 의 원소 중에서 가장 작은 값인 동시에 2열 $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ 의 원소 중에서 가장 큰 값이므로, 안장점이다.

나머지 경우, 즉

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

일 때에도 같은 방법으로 안장점이 존재함을 보일 수 있다.

한편, 행순이에게 우세전략이 있다는 것은 $a-c$ 와 $b-d$ 의 부호가 같다는 것이므로

$$(a-c)(b-d) \geq 0$$

일 때이다. 먼저

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$$

라고 가정해 보자. 이제 $a \leq b$ 이거나 $a \geq b$ 일 터인데,

(1) 만일 $a \leq b$ 이면 a 가 안장점이다.

(2) 또, 만일 $a \geq b$ 이면 $b \geq d$ 이므로 b 가 안장점이 된다.

나머지 경우, 즉

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$$

일 때에도 같은 방법으로 안장점이 존재함을 보일 수 있다. ■

지금까지 누군가에게 우세한 전략이 있는 2×2 게임에는 반드시 안장점이 있음을 보였다. 다시 말하면, 게임

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

에 대하여 만일

$$(b-a)(d-c) \geq 0$$

이거나

$$(a-c)(b-d) \geq 0$$

이면, 안장점이 있다는 것이다.

이번에는

$$a-b-c+d=0$$

일 때를 생각해 보자. 그러면

$$0=a-b-c+d=(d-a)-(b-a)$$

이므로 $b-a=d-c$ 이고, 또

$$0=a-b-c+d=(a-c)-(b-d)$$

이므로 $a-c=b-d$ 이다. 그러므로

$$(b-a)(d-c)=(b-a)^2 \geq 0,$$
$$(a-c)(b-d)=(a-c)^2 \geq 0$$

이고, 이때에는 행순이, 열식이 모두에게 우세전략이 있게 되고, 또 이 게임에는 안장점이 존재한다.

이번에는 안장점이 있으면 행순이 또는 열식이 누군가에게 우세전략이 있음을 보이겠는데, 먼저 안장점이 a 일 때를 생각해 보자. 안장점은 행벡터의 원소 중에서 최소값인 동시에 열벡터의 원소 중에서 최대값이므로 안장점이 a 라는 것은

$$c \leq a \leq b$$

이다. 이제 $b \leq d$ 이거나 $b \geq d$ 일 터인데

(1) 만일 $b \leq d$ 이면

$$c \leq a \leq b,\ b \leq d \quad \Rightarrow \quad c \leq a \leq b \leq d \quad \Rightarrow \quad c \leq d$$

이므로

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

이다. 즉, 열식이에게 우세전략이 존재한다.

(2) 만일 $b \geq d$ 이면,

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$$

이므로 행순이에게 우세전략이 존재한다.

이번에는 안장점이 b 일 때를 생각해보자. 이때는

$$a \geq b \geq d$$

이다. 이제 $a \leq c$ 이거나 $a \geq c$ 일 터인데

(1) 만일 $a \leq c$ 이면, $c \geq d$ 이므로

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

이어서 열식이에게 우세전략이 있게 된다.

(2) 만일 $a \geq c$ 이면

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$$

이어서 행순이에게 우세전략이 있게 된다.

같은 방법으로 안장점이 c 또는 d 일 때에도 누군가에게 우세전략이 있게 됨을 보일 수 있다. ■

지금까지 우세전략이 있다는 것이나 안장점이 있다는 것이 2×2 게임에서는 동치임을 알아 보았다. 그런데, 우세전략이 있는 2×2 게임에서 행순이와 열식이가 모두 안장점이 존재한다는 사실을 모르고 게임에 참여한다면 그 결과는 어떻게 될까? 다음 보기에서 알 수 있듯이, 그 결과는 행순이와 열식이가 모두 안장점이 있는 전략을 사용하는 것과 같다.

보기 4.1. 다음 세 게임에서 모두에서 4는 안장점이다.

1. 2×2 게임

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

에서, 열식이에게는 우세전략이 없지만 행순이에게는 우세전략이 있다. 그래서 이 게임은 다음과 같이 풀릴 것이다.

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}.$$

2. 2×2 게임

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

에서, 행순이에게는 우세전략이 없지만 열식이에게는 우세전략이 있다. 그래서 이 게임은 다음과 같이 풀릴 것이다.

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}.$$

3. 2×2 게임

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

에서, 행순이와 열식이 모두에게 우세전략이 있다. 그래서 이 게임은 다음과 같이 풀릴 것이다.

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}.$$

4.2 2×2 게임의 풀이

이제 2×2 게임

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

을 풀 수 있음을 보이겠다. 앞 절의 설명으로부터 다음을 만족하는 경우만 생각하면 된다:

$$a-b-c+d \neq 0, \quad (b-a)(d-c) < 0, \quad (a-c)(b-d) < 0.$$

이제 행순이의 혼합전략 $\begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix}$ 의 1 열에 대한 기대값은

$$\begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = (a-c)x + c$$

이고 2 열에 대한 기대값은

$$\begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = (b-d)x + d$$

이므로 행순이의 최선의 전략은 두 직선

$$y = (a-c)x + c, \quad y = (b-d)x + d$$

가 만나는 점으로 주어진다. 즉, 이때는 $x = \dfrac{d-c}{a-b-c+d}$ 이고[4] 행순이의 최선의 혼합전략은

$$\begin{bmatrix} \frac{d-c}{a-b-c+d} & \frac{a-b}{a-b-c+d} \end{bmatrix}$$

이다. 그리고 이때의 행순이의 기대값을 계산하면[5]

$$\begin{bmatrix} \frac{d-c}{a-b-c+d} & \frac{a-b}{a-b-c+d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \frac{ad-bc}{a-b-c+d}$$

이다.

이번에는 위와 같은 방식으로 행순이가 순수전략으로 대응해 올 것을 가정하여 열식이의 최선의 혼합전략을 계산하여 보자.

4) $(b-a)(d-c) < 0$ 이면 두 직선 $y = (a-c)x + c$ 와 $y = (b-d)x + d$ 가 구간 $0 < x < 1$ 에서 만난다. 각자 확인해 보기 바란다.

5) 바로 앞의 기대값 두 개 중에서 아무거나의 x 에 $x = \frac{d-c}{(a-b)-(c-d)}$ 를 대입하면 된다. 왜일까?

열식이의 혼합전략 $\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}$ 의 1행에 대한 기대값은

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix} = (a-b)x + b$$

이고 2행에 대한 기대값은

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix} = (c-d)x + d$$

이므로 열식이의 최선의 전략은 두 직선

$$y = (a-b)x + b, \quad y = (c-d)x + d$$

가 만나는 점으로 결정된다.[6] 즉, $x = \frac{d-b}{a-b-c+d}$ 일 때의 혼합전략

$$\begin{bmatrix} \frac{d-b}{a-b-c+d} \\ \frac{a-c}{a-b-c+d} \end{bmatrix}$$

이 최선의 전략이고 이때의 기대값은

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d-b}{a-b-c+d} \\ \frac{a-c}{a-b-c+d} \end{bmatrix} = \frac{ad-bc}{a-b-c+d}$$

으로서 행순이의 기대값과 같다.

행순이와 열식이 두 명의 기대값이 과연 같군! 그거 참.... 그러나 잠깐, 앞 단원의 스토리를 되짚어 보자. 행순이는 혼합전략을 고를 때 열식이가 최선의 순수대응전략으로 대응할 것이라고 가정하고 최선의 혼합전략을 선택하고 열식이는 열식이대로 이렇게 생각하여 최선의 혼합전략을 선택할 것이다. 그래서 실제로 게임을 해 보면 행순이도 열식이도 순수전략으로 대응해 오지는 않고 결과적으로 양쪽 모두 최선이라고 생각한 혼합전략을 사용하게 될 것이고 따라서 양쪽의 전략에 대한 기대값이 위에서 계산한 기대값과는 달라야하는 것이 아니겠는가? 예를 들어서 위에서 계산한 행순이의 기대값은 열식이의 순수전략에 대한 기대값이었으니 말이다.... 그래서 나는 위에서 계산한 기대값과 양쪽의 최선의 혼합전략에 대한 기대값을 비교해 보기로 하였다. 이제 행순이의 최선의 전략과 열식이의 최선의 전략이 동시에 사용될

6) $(a-c)(b-d) < 0$ 이면 두 직선 $y = (a-b)x + b$ 와 $y = (c-d)x + d$ 가 구간 $0 < x < 1$ 에서 만난다. 각자 확인해 보기 바란다.

경우의 기대값을 계산하면

$$\begin{bmatrix} \frac{d-c}{a-b-c+d} & \frac{a-b}{a-b-c+d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d-b}{a-b-c+d} \\ \frac{a-c}{a-b-c+d} \end{bmatrix}$$

인데, 이제 연필을 꺼내서 이 값과 위의 행순이의 기대값을 비교해 보면.... 두 값은 같다..... 그거 참..........[7] 그리고 이 계산으로부터 (순수전략을 예상하고 계산했던) 행순이와 열식이의 기대값이 같다는 것도 증명을 한 셈이다.[8] 즉, 임의의 2×2 게임을 풀 수 있다는 주장을 증명한 것이다.

보기 4.2. 다음 게임

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

의 $(b-a)(d-c)$ 를 계산해 보면

$$(b-a)(d-c) = (-3-0)(1-4) = 9 > 0$$

이므로 이 게임은 결정된 게임이다. 이 게임의 안장점은 2 행 2 열의 1 이므로 행순이와 열식이 모두의 최선의 전략에 대한 기대값은 1 이다.

보기 4.3. 다음 게임

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

은 결정된 게임이 아니다. 이제 행순이의 최선의 (혼합)전략은

$$\begin{bmatrix} \frac{d-c}{a-b-c+d} & \frac{a-b}{a-b-c+d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

이고 열식이의 최선의 (혼합)전략은

$$\begin{bmatrix} \frac{d-b}{a-b-c+d} \\ \frac{a-c}{a-b-c+d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

이며 행순이와 열식이의 최선의 기대값은 모두

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = 2$$

이다.

7) 사실은, 최선의 전략이라는 것에 대한 기대값이 두가지 순수대응전략에 대한 기대값이 같아지도록 하는 값이라서 그런건데....

8) 왜 그럴까를 역시 생각해 보시라.

보기 4.4. 이제 다음 3×3 게임을 풀어 보자.

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

열식이의 입장에서 2열이 3열보다 우세한 전략이고 행순이의 입장에서 2행이 3행보다 우세한 전략이다. 그러므로 이 게임은 다음 게임과 마찬가지인데

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

이 게임은 결정된 게임이 아니다. 이제 이 2×2 게임을 풀면, 행순이의 최선의 전략은 $\begin{bmatrix} \frac{5}{14} & \frac{9}{14} & 0 \end{bmatrix}$ 이고 열식이의 최선의 전략은 $\begin{bmatrix} \frac{6}{14} \\ \frac{8}{14} \\ 0 \end{bmatrix}$ 이며 게임의 가치는 $\frac{1}{7}$ 이다. 이 게임은 행순이에게 유리한 게임이다.

이제, 마지막으로 행순이와 열식이 누군가에게 우세전략이 있음에도 불구하고 혼합전략을 사용하려고 한다면 어떤 결과가 나올 지를 앞의 보기 4.1을 이용하여서 살펴 보겠는데, 행순이의 입장에서만 살펴 보겠다.

1. 이 경우는 행순이에게 우세전략이 있는 경우로서 우세전략은 1행이다. 그러므로 행순이의 최선의 전략은 1행이라는 순수전략이다.

   이제 행순이의 전략 $\begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix}$ 에 대해서 열식이가 1열을 사용할 경우의 기대값은

   $$\begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2x + 2$$

   이고 2열을 사용할 경우의 기대값은

   $$\begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 6x$$

   이므로 행순이에게 나쁜 경우는

   $$\min\{2x + 2, 6x\}$$

이고, 이 함수의 구간 $0 \le x \le 1$ 에서의 최대값은 $x = 1$ 일 때의 값 4로서 안장점의 값이다. 또, 행순이의 최선의 전략은 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ 인데 이는 1행이라는, 행순이의 우세전략을 나타낸다.

2. 이 경우는 열식이에게는 우세전략이 있지만 행순이에게는 우세전략이 없다. 그렇지만 앞의 보기 4.1에서의 풀이에서 그렇듯이 행순이의 최선의 전략은 순수전략 1행이었다.

   이제 행순이의 전략 $\begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix}$ 에 대해서 열식이가 1열을 사용할 경우의 기대값은

   $$\begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2x + 2$$

   이고 2열을 사용할 경우의 기대값은

   $$\begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2x + 8$$

   이므로 행순이에게 나쁜 경우는

   $$\min\{2x+2, -2x+8\} = 2x + 2$$

   이고, 이 함수의 구간 $0 \le x \le 1$ 에서의 최대값은 $x = 1$ 일 때로서, 행순이의 최선의 전략은 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ 즉, 1행이라는 순수전략이다. 또, 이때의 기대값은 안장점의 값 4 이다.

3. 이 경우는 행순이와 열식이 모두에게 우세전략이 있는 경우로서 우세전략은 각각 1행과 1열이고, 우세전략이 겹치는 부분이 기대값 4 이다.

   이제 행순이의 전략 $\begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix}$ 에 대해서 열식이가 1열을 사용할 경우의 기대값은

   $$\begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2x + 2$$

   이고 2열을 사용할 경우의 기대값은

   $$\begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3x + 3$$

   이므로 행순이에게 나쁜 경우는

   $$\min\{2x+2, 3x+3\} = 2x + 2$$

이고, 이 함수의 구간 $0 \le x \le 1$ 에서의 최대값은 $x = 1$ 일 때로서, 행순이의 최선의 전략은 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ 즉, 1행이라는 순수전략이다. 또, 이때의 기대값은 안장점의 값 4 이다. ■

그러므로, 2×2 게임을 풀 때, 순수전략이 최선의 전략인 경우에도 최선의 혼합전략을 찾으려는 계산 과정은 여전히 쓸모가 있다고 할 수 있겠다.

연습문제

1. 임의의 x에 대하여 다음 두 게임의 행순이와 열식이의 최선의 전략이 같음을 보여라.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a+x & b+x \\ c+x & d+x \end{bmatrix}$$

2. 다음 게임을 풀어라.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

3. 다음 게임에서 행순이와 열식이는 사용하지 않을 전략 들이 있다. 그래서 이들을 고려하면 2×2 게임이 된다. 이 게임을 풀어라.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 7 \\ -1 & 5 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

제 5 장

선형계획법

앞 단원에서 2×2 제로섬 게임을 풀었다. 이제 $m \times n$ 제로섬 게임의 풀이를 알아볼 순서인데, 이를 위하여 선형계획법이라는 것을 먼저 알아본다. 그런데, 선형계획법이 무엇인가를 설명하는 것 보다는 선형계획법에서 다루는 문제들을 설명하고 그 풀이 방법을 이해하는 것이 선형계획법이라는 것을 이해하기에 더 좋은 방법일 것이라고 생각하기에 선형계획법에서는 어떤 문제들을 다루는가를 이 단원에서 간단하게 설명하고 더불어서, 선형계획법 문제를 체계적으로 표시하는 방법도 알아본다.

5.1 선형계획법에서 다루는 문제

선형계획법에서 다루는 문제는

> 여러 개의 일차방정식 또는 일차부등식을 만족하는 집합에서
> 일차함수의 최소값 또는 최대값을 구하는 것

이다. 예를 들어서 부등식

$$\begin{aligned} x_1,\ x_2 &\geq 0 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 - 3x_2 &= 12 \\ x_1 + 7x_2 &\geq 5 \end{aligned}$$

을 만족하는 집합에서 일차함수

$$-x_1 + 4x_2$$

의 최소값 또는 최대값을 구하는 따위의 문제이다. 여기에서 일차방정식 또는 일차부등식 들을 **제약조건**이라고 하고 최대값 또는 최소값을 구하고자 하는 일차함수를 **목적함수**라고 부른다. 위의 문제에서의 목적함수는 $-x_1 + 4x_2$ 이다. 그런데, 위의 제약조건 중에서

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

은 반드시 만족시켜야 하는 제약조건으로서 이는 선형계획법이라는 분야가 등장하게 된 이유 및 목적과 관련이 있다. 그래서 보통의 경우에는 이와 같은 제약조건은 생략하고 제약조건을 간단히

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 - 3x_2 &= 12 \\ x_1 + 7x_2 &\geq 5 \end{aligned}$$

나타내기도 한다.[1] 한편, 제약조건을 나타내는 일차방정식이나 일차부등식은 모두

$$\text{일차식} \geq 0 \ \text{ 또는 }\ \text{일차식} \leq 0$$

1) 그렇지만, 우리는 이렇게 하지는 않을 예정이다.

의 꼴로 나타낼 수 있다.

보기 5.1.

$$x_1 - 3x_2 \geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad -x_1 + 3x_2 \leq -4,$$

$$y_1 - 2y_2 = 1 \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{lcl} y_1 - 2y_2 & \geq & 1 \\ y_1 - 2y_2 & \leq & 1 \end{array} \right. \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{lcr} y_1 - 2y_2 & \geq & 1 \\ -y_1 + 2y_2 & \geq & -1 \end{array} \right.$$

이제 제약조건의 일차방정식이나 일차부등식을 모두

$$\text{일차식} \geq 0$$

의 꼴로 나타낸 최소값의 문제를 **표준형 최소값 문제**라고 부르고 제약조건의 부등식을 모두

$$\text{일차식} \leq 0$$

의 꼴로 나타낸 최대값의 문제를 **표준형 최대값 문제**라고 부른다. 선형계획법에 등장하는 어떠한 최소값 문제나 최대값 문제도 표준형 문제로 바꿀 수 있다.[2)]

이제, 다음과 같은 약속을 하자. 수학적 표현에 대한 것이다.

- 벡터는 굵은 활자로 쓰기로 하고 열벡터를 나타낸다.
- n 차원 벡터와 $n \times 1$ 행렬을 혼동하여 쓰기로 하고, 벡터의 내적을 다음과 같이 행렬의 곱을 이용하여 나타낸다.

$$2x_1 + x_2 = \mathbf{a}^T\mathbf{x}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- 두 벡터 **a** 와 **b** 에 대하여

$$\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$$

2) 물론, 다음과 같이 새로운 변수를 하나 더 추가함으로써, 부등식으로 표시된 제약조건을 등식으로 표시된 제약조건으로 바꿀 수도 있다.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - 2x_2 & \geq & 1 \\ x_1,\ x_2 & \geq & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - 2x_2 - x_3 - 1 & = & 0 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - 2x_2 - x_3 & = & 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

가 의미하는 것은 벡터 **a** 의 각각의 성분이 벡터 **b** 의 대응되는 성분과 비교하여 항상 $\geq$ 라는 것이다.[3] 예를 들어서

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

행벡터 또는 $1 \times n$ 행렬에 대해서도

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

특히, 예를 들어서

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \leq 0,\ b \leq 0.$$

- 최소값 문제에서의 변수는 $y_1, y_2, \ldots$ 로 나타내고,
  최대값 문제에서의 변수는 $x_1, x_2, \ldots$ 로 나타낸다.

이제 이와 같은 약속을 따르기로 한다면 목적함수에는 그에 대응하는 벡터가 존재하게 된다.

보기 5.2. *1.* 최소값을 찾고자 하는 목적함수가 $-y_1 + 2y_2 + 3y_3$ 라면

$$-y_1 + 2y_2 + 3y_3 = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

와 같이 쓸 수 있으므로 이 목적함수를 나타내는 벡터는 $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 이다.

2. 최대값을 찾고자 하는 목적함수가 $-x_1 + 2x_2 + 3x_3$ 라면

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

와 같이 쓸 수 있으므로 이 목적함수를 나타내는 벡터는 $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 이다.

3) 앞에서 우세한 전략을 설명할 때, 이러한 약속을 먼저 소개했었으면 더 편했을 것이라는 생각이 든다.

이 보기에서 최소값 문제의 목적함수를 나타내는 벡터는 열벡터로 나타내었고, 최대값 문제의 목적함수를 나타내는 목적함수는 행벡터로 나타내었는데, 이는 의도적인 것이다. 목적함수를 나타내는 벡터를 **목적벡터**라고 부르겠다.

이제 그러면 표준형 최소값, 최대값 문제의 제약조건에는 그에 대응하는 행렬과 벡터가 존재하게 된다. 각각을 **제약행렬**, **제약벡터**라고 부르면 되겠다.

보기 5.3. *1.* 표준형 최소값 문제의 제약조건

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\geq 4 \\ y_1 - 3y_2 &\geq -5 \end{aligned}$$

에 대해서 살펴보면 이 식은

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 4 & -5 \end{bmatrix}$$

와 같이 쓸 수 있으므로 제약행렬은

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

이고 또 제약벡터는 $\begin{bmatrix} 4 & -5 \end{bmatrix}$ 이다.

2. 표준형 최대값 문제의 제약조건

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq -5 \end{aligned}$$

에 대해서 살펴보면 이 식은

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

와 같이 쓸 수 있으므로 이 제약행렬은

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

이고 또 제약벡터는 $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ 이다.

이 보기에서 최소값 문제에 대해서는 행벡터를 사용하였고, 최대값 문제에 대해서는 열벡터를 사용하였는데, 이 또한 의도적인 것이다. 이 관례를 따르면 여러가지로 편하다.

5.2 쌍대문제

이제 선형계획법문제를 표준형 문제로 고치면 그에 따라서 제약조건을 나타내는 행렬과 벡터가 있게 되고 또 목적함수를 나타내는 벡터도 있게 됨을 안다.

이제 다음 표준형 최소값 문제 (♭)과 표준형 최대값 문제 (♯)를 서로 **쌍대문제**라고 부른다.

(♭) 제약조건이 $\mathbf{y}^T A \geq \mathbf{c}^T,\ \mathbf{y} \geq 0$ 일 때 목적함수 $\mathbf{y}^T \mathbf{b}$ 의 최소값을 구하는 문제

(♯) 제약조건이 $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0$ 일 때 목적함수 $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ 의 최대값을 구하는 문제

다시 말하면, 제약조건을 나타내는 행렬은 서로 같고, 제약조건을 나타내는 벡터와 목적함수를 나타내는 벡터가 서로 뒤바뀐 두 개의 표준형 최소값 문제와 표준형 최대값 문제를 서로 쌍대문제라고 부른다는 것이다.

보기 5.4. 다음의 왼쪽 문제와 오른쪽 문제는 서로 쌍대문제이다.

$max\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$	$min\left(\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq 0$	$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \geq 0$

여기에서 쌍대문제가 공유하고 있는 데이터들은 다음과 같다:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

쌍대문제라는 것이 구체적으로는 어떤거 같은 건가? 다음 보기를 보자.

보기 5.5. 여러가지 비타민 $V_1, V_2, \cdots, V_m$ 이 있는데, 이 비타민을 포함하고 있으며 고를 수 있는 식재료는 $F_1, \cdots, F_n$ 이다. 다음 표는 α_{ij} 는 식재료 F_j 한 단위가 갖고 있는 비타민 V_i 의 양을 나타낸다.

	V_1	V_2	$\cdots$	V_m
F_1	α_{11}	α_{12}	$\cdots$	α_{1m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
F_n	α_{n1}	α_{n2}	$\cdots$	α_{nm}

그런데, 비타민 V_j 를 최소한 c_j 이상은 섭취하여야만 사람이 사람답게 살게 된다고 한다.

1. 영양사가 식단을 짜려고 한다. 각각의 비타민 V_i 가 최소한 c_i 는 있도록 하여야 할 것이다. 이제 식재료 F_i 를 y_i 단위씩 준비한다면, 이 식단에 들어 있는 비타민 V_j 의 양은
$$y_1\alpha_{1j} + y_2\alpha_{2j} + \cdots + y_n\alpha_{nj}$$
이므로, 이 식단이 제법하려면
$$y_1\alpha_{1j} + y_2\alpha_{2j} + \cdots + y_n\alpha_{nj} \geq c_j$$
이어야 할 것이다. 그런데, 식재료 F_i 한 단위의 가격이 b_i 이라면, 영양사가 이 식단을 준비할 때 드는 비용은
$$b_1y_1 + \cdots + b_ny_n$$
이다. 영양사는 비용이 가작 적게 들도록 할 것이므로 영양사에게 주어진 문제는 다음과 같은 최소값 문제를 푸는 일일 것이다. 이 영양사는 음식의 맛에는 관심이 없다고 한다.

> 제약조건 $\boldsymbol{y}^T A \geq \boldsymbol{c}^T,\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ 을 만족시키는 영역에서 목적함수 $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}$ 의 최소값과 최소값을 갖게끔 하는 $\boldsymbol{y}$ 를 구하여라.

여기에서

$$A = [\alpha_{ij}], \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m$$

이고

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

이다.

2. 이번에는 비타민을 만들어서 파는 제약회사의 입장에서 생각해 보자. 이 회사가 비타민 V_i 한 단위를 만들어서 파는 가격은 x_i 이라고 하면, 앞의 영양사에게 이 비타민을 팔기 위해서는 제약회사의 비타민을 사서 먹이는 것이 식재료를 이용하여 먹이는 것보다 싸야 할 것이다. 그래서 이 제약회사의 입장에서 식재료 F_i 의 가격을 다음과 같이 계산할 것이다:

    식재료 F_i 는 비타민 V_j 를 α_{ij} 단위 가지고 있으므로 비타민 회사의 가격으로는

    $$\alpha_{i1}x_1 + \cdots + a_{im}x_m$$

    이다.

    그런데 식재료 F_i 의 가격은 b_i 이므로 회사의 제품이 영양사에게 팔리기 위해서는

    $$\alpha_{i1}x_1 + \cdots + a_{im}x_m \leq b_i$$

    이어야 할 것이다. 그래서 이 회사의 비타민이 팔린다면 그 때의 비타민 회사의 수입은

    $$c_1x_1 + \cdots + c_mx_m$$

    일 것이고 따라서 비타민 회사는 이 값을 가장 크게 하려고 노력할 것이다. 그러므로 비타민 회사는 다음과 같은 최대값 문제를 풀려 할 것이다:

제약조건 $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ 을 만족하는 영역에서 목적함수 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ 의 최대값과 그 최대값을 갖게끔하는 $\boldsymbol{x}$ 를 구하여라.

여기에서 $A, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}$ 는 앞에서와 같은 행렬과 벡터이고

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

이다.

비타민을 소재로 하여서 영양사의 입장과 비타민 회사의 입장을 살펴 보았는데 영양사는 처음의 최소값 문제를 풀려 할 것이고 비타민 회사는 나중의 최대값 문제를 풀려 할 것이다. 잘 살펴보면 처음의 문제와 나중의 문제는 서로 쌍대문제이다.

영양사에게는 비용이 적게 들수록 좋을 것이고, 비타민 회사에게는 이익이 많이 남을 수록 좋을 것이다. 그래서 영양샤와 비타민 회사는 서로 대결 관계에 있다고 하겠는데, 쌍대문제는 이처럼 서로 대결관계에 있는 문제 들을 나타낸다고 하겠다.

쌍대문제는 다음과 같은 특징을 갖고 있다.

- 쌍대문제의 쌍대문제는 원래의 문제이다.
- 제약조건을 만족시키는 영역은 서로 다른 공간의 부분집합이다.
- 처음 문제에서 제약조건을 결정하는 벡터는 쌍대문제의 목적함수를 결정하고, 처음 문제에서 목적함수를 결정하는 벡터는 나중 문제의 제약조건을 결정한다.
- 뿐만 아니라 제약조건을 결정하는 제약행렬은 서로 같다.
- 그래서 처음 문제와 쌍대문제의 주인공들을 살펴 보면 모두

$$A, \quad \mathbf{b}, \quad \mathbf{c}$$

  로서 서로 같다.

그러므로 행렬 $A = [a_{ij}]$ 와 두 벡터 $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ 를 공유하는 쌍대문제를 다음과 같이 하나의 표로 나타낼 수 있다.

	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1m}	$\leq b_1$
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2m}	$\leq b_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_n	a_{n1}	a_{n2}	$\cdots$	a_{nm}	$\leq b_n$
	$\geq c_1$	$\geq c_2$	$\cdots$	$\geq c_m$	

이 표를 읽는 방법은 다음과 같다.

- 최소값 문제의 경우는 모두 열벡터를 사용하여서 생각하면 편리하다:

  y_i 들로 이루어진 맨 왼쪽 열벡터와 a_{ij} 로 이루어진 열벡터와의 내적값이 이 바로 그 열의 맨 아래에 있는 c_j 보다 같던지 커야한다는 것이 첫번째 제약조건이고 $\cdots$ y_i 들로 이루어진 맨 왼쪽 열벡터와 맨 오른쪽에 b_i 들로 이루어진 열벡터와의 내적이 목적함수이다.

- 최대값 문제의 경우는 모두 행벡터를 사용하여서 생각하면 편리하다:

  x_j 들로 이루어진 맨 위쪽 행벡터와 a_{ij} 로 이루어진 행벡터와의 내적값이 이 바로 그 행의 맨 오른쪽에 있는 b_i 보다 같던지 작아야한다는 것이 첫번째 제약조건이고 $\cdots$ x_j 들로 이루어진 맨 위쪽 행벡터와 맨 아래쪽에 c_j 들로 이루어진 행벡터와의 내적이 목적함수이다.

앞의 보기 5.5 를 하나의 표로 정리하면, 바로 위에 있는 표가 된다.

보기 5.6. 앞의 보기 *5.4* 를 이와 같이 표를 이용하여 나타낸다면 다음과 같다.

	x_1	x_2	
y_1	1	2	4
y_2	4	2	12
y_3	-1	1	1
	1	1	

앞의 표의 맨 아래와 맨 오른쪽에는 부등호 들이 있었는데, 만일 표준형 문제에서의 제약조건에서의 부등호의 방향을 기억하고 있다면, 이 보기에서의 표와 같이 부등호가 없이 나타내는 것이 보다 간단하고 보기에도 좋을 것이다.

연습문제

1. 어떤 공장에서 제품 A, B, C를 만드는데, (가), (나), (다)의 공정이 필요하다고 한다. 다음 표는 각각의 제품을 만드는데 소요되는 각각의 공정의 소요시간을 나타낸다. 하루에 공정 (가)는 480분 가동할 수 있으며, (나)는 450분, (다)는 420분 가동할 수 있고, 각각의 제품 한 단위 당 이익은 A는 3만원, B는 5만원, C는 4만원이라고 한다. x_1 은 제품 A의 1일 생산량, x_2 는 제품 B의 1일 생산량, x_3 은 제품 C의 1일 생산량이라고 할 때, 생산량을 적절히 조절하여 이익을 가장 크게 하고 싶다. 선형계획법 문제를 만들어라.

	A	B	C
(가)	2	1	5
(나)	3	2	1
(다)	0	4	6

2. 원주와 문경에 공장을 가지고 있는 회사가 제품을 판매하는 가게는 서울, 부산, 광주에 있다. 원주 공장은 12단위를 생산하고, 문경 공장은 14단위를 생산한다. 서울 가게에서는 10단위의 수요가 있고, 부산은 8 단위, 광주는 6 단위의 수요가 있는데 각 공장에서 각 가게 까지의 단위 당 운반비용은 다음 표와 같다. 각각의 가게의 수요를 충족시키면서 운반비용을 최소화하고 싶다. 선형계획법 문제를 만들어라.

	서울	부산	광주
원주	4	2	8
문경	6	4	10

3. 제약조건이 다음과 같을 때, $x_1 + x_2$ 의 최대값을 구하는 문제에 대하여

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1 \\ -x_1 + x_2 &\leq 0 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

   a) 표준형 최대값 문제로 바꾸어라.
   b) 목적벡터와 제약벡터를 구하여라.
   c) 쌍대문제를 구하여라.

4. 제약조건이 다음과 같을 때 $3x_1 - 5x_2$ 의 최소값을 구하는 문제에 대하여

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 7 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 6 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

   a) 표준형 문제로 바꾸어라.
   b) 목적벡터와 제약벡터를 구하여라.
   c) 쌍대문제를 구하여라.

5. 제약조건이 다음과 같을 때 $6y_1 - 3y_2 - y_3$ 의 최소값을 구하는 표준형 최소값 문제에 대하여

$$\begin{aligned} 5y1 + 4y_2 + 2y_3 &\geq 1 \\ -y_1 + y_2 + 4y_3 &\geq -4 \\ 2y_1 - 5y_2 + 6y_3 &\geq 0 \\ y_1,\ y_2,\ y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

   a) 쌍대문제를 구하여라.
   b) 처음 문제와 쌍대문제를 하나의 표로 함께 나타내어라.

6. 다음 표준형 문제의 쌍대문제를 구하고, 처음 문제와 쌍대문제를 하나의 표로 함께 나타내어라.

   a) 제약조건이

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &\leq 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 &\leq -4 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

   일 때 $3x_1 + 9x_2 - x_3$ 의 최대값.

   b) 제약조건이

$$\begin{aligned} 2y_1 + 5y_2 &\geq 7 \\ -4y_1 - y_2 &\geq 0 \\ y_1,\ y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

일 때 $3y_1 - 4y_2$ 의 최소값.

제 6 장

연립일차부등식

선형계획법의 문제는 일차부등식 들을 만족시키는 영역에서 일차함수의 최대값 또는 최소값을 찾는 문제라는 것을 안다. 이 단원에서는 일차부등식 들을 만족시키는 영역은 어떤 특징이 있으며, 이 영역에서의 일차함수의 최대값 또는 최소값은 어떤 점에서 갖게 되는지를 알아 본다.

6.1 일차부등식을 만족시키는 점 들의 집합

xy 평면에서 일차방정식 $x+y=a$ 를 만족시키는 점 들의 집합을 다음과 같이 생각할 수 있다.

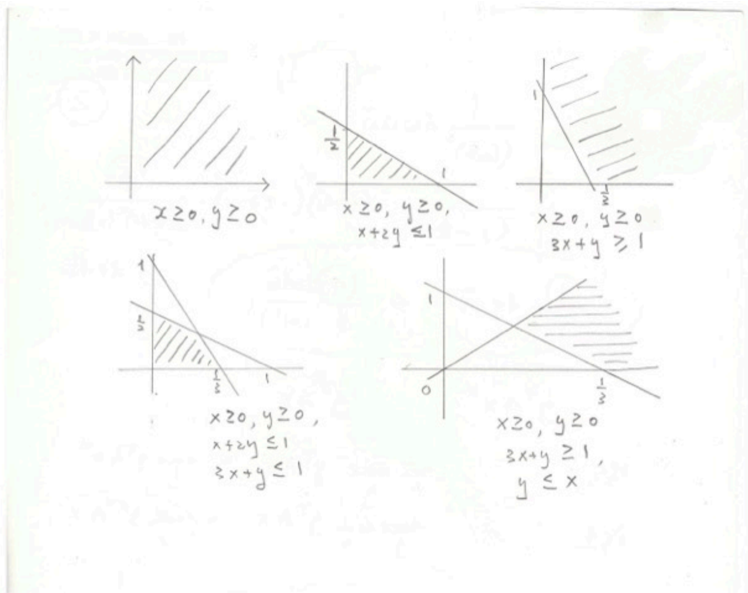
- 일차함수 $f(x,y)=x+y$ 에 대하여, 이 함수의 값이 a 이 되는 점 들의 집합이다. 즉,
$$f^{-1}(a)=\{(x,y):x+y=a\}.$$
- 직선이다. 그러므로 $f^{-1}(a)$ 에 속하는 두 점을 골라서 그 두 점을 자로 이으면 이 직선을 얻는다.

이 직선은 평면을 다음 두 부분으로 나눈다.

$$\{(x,y):x+y\geq a\},$$
$$\{(x,y):x+y\leq a\}$$

이들 각각은 반평면을 나타내는데, 그러므로 여러개의 일차부등식을 만족시키는 점 들의 집합은 볼록다각형과 비슷한 모습일 것이다.

이처럼, 연립일차부등식을 만족시키는 점들의 집합은 보통 볼록다각형이 되는데, 이 볼록다각형은 유계일 수도 있고 유계가 아닐 수도 있다. 보기에서 두번째, 네번째 영역은 유계이고, 나머지 영역은 유계가 아니다.



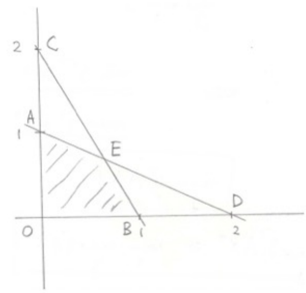
보기 6.1.

6.2 꼭지점과 모서리

이제 연립일차부등식을 만족시키는 점 들의 집합은 볼록다각형과 비슷한 모습을 하고 있음을 안다. 다음 연립일차부등식을 보자.

$$x + 2y - 2 \leq 0, \quad 2x + y - 2 \leq 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

이 연립부등식을 만족시키는 영역은 그림에서 빗금친 부분인 볼록다각형 영역인데,



이 다각형의 모서리는

$$\overline{OA}, \quad \overline{OB}, \quad \overline{AE}, \quad \overline{EB}$$

이고, 이 모서리 들을 각각 식으로 타나내면 다음과 같다:

- $\overline{OA}: \quad x + 2y - 2 \leq 0, \quad 2x + y - 2 \leq 0, \quad x = 0, \quad y \geq 0.$
- $\overline{OB}: \quad x + 2y - 2 \leq 0, \quad 2x + y - 2 \leq 0, \quad x \geq 0, \quad y = 0.$
- $\overline{AE}: \quad x + 2y - 2 = 0, \quad 2x + y - 2 \leq 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$
- $\overline{EB}: \quad x + 2y - 2 \leq 0, \quad 2x + y - 2 = 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$

그래서 다음을 알 수 있다:

> 연립일차부등식을 만족시키는 영역은 볼록부등식 영역인데, 이 영역의 모서리를 수식으로 나타내려면, 일차부등식 중에서 적당한 하나를 등식으로 쓰면 된다.

또, 꼭지점은

$$O, \quad A, \quad E, \quad B$$

인데, 이들을 식으로 나타낸다면 다음과 같다.

- O : $x = 0, \quad y = 0.$
- A : $x + 2y - 2 = 0, \quad x = 0.$
- E : $x + 2y - 2 = 0, \quad 2x + y - 2 = 0.$
- B : $2x + y - 2 = 0, \quad y = 0.$

그래서 다음을 알 수 있다:

> 연립일차부등식을 만족시키는 영역은 볼록부등식 영역인데, 이 영역의 꼭지점을 수식으로 나타내려면, 일차부등식 중에서 적당한 두 개를 등식으로 쓰면 된다.

6.3 일차함수의 최대, 최소값

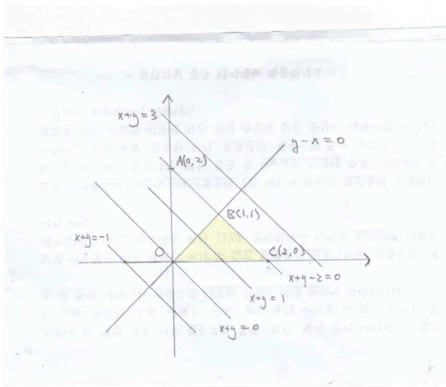
연립일차부등식

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad y - x \leq 0, \quad x + y - 2 \leq 0$$

을 만족시키는 영역에서 일차함수

$$f(x, y) = x + y$$

의 최대값과 최소값을 구하는 문제를 생각해 보자.



이 그림은, 주어진 연립일차부등식을 만족시키는 영역 $\mathcal{D}$ 와 직선

$$f^{-1}(-1), f^{-1}(0), f^{-1}(1), f^{-1}(2), f^{-1}(3)$$

를 그린 것인데, $f^{-1}(a)$ 는 직선 $x+y=a$ 에 있는 점 들의 집합으로서 이들은 평행한 직선 들이다. 이 직선 들을 그려본 이유는 함수 $f(x, y) = x+y$ 의 값이 a 가 되는 점이 영역 $\mathcal{D}$ 에 있는지를 알아 보기 위해서이다. a 가 변하면 직선 $f^{-1}(a)$ 는 평행하게 움직이므로, 이렇게 해서 $f(x, y) = x+y$ 의 값이 a 가 되는 점이 영역 $\mathcal{D}$ 에 있는지를 알아 볼 수 있을 뿐만 아니라, 최대값, 최소값도 알 수 있고, 최대값, 최소값을 갖게끔 하는 점도 알아 볼 수 있다.

그림에서 직선 $x + y = -1$ 은 영역 $\mathcal{D}$ 를 지나지 않는데, 이 사실은 영역 $\mathcal{D}$ 의 점으로서 함수 $f(x, y) = x + y$ 의 값이 -1 이 되게끔하는 점은 없다는 것이다. 이제 직선 $x + y = -1$ 와 평행한 직선 들을 그려가며 이 직선이 영역 $\mathcal{D}$ 와 만나는지를 살펴보면 다음을 알 수 있다.

- 일차함수 $f(x, y) = x + y$ 는 꼭지점 $O(0, 0)$ 에서 최소값을 갖고, 그 최소값은 0 이다.
- 일차함수 $f(x, y) = x+y$ 는 선분 $\overline{BC}$ 에 있는 점에서 최대값을 갖고 그 최대값은 2 이다. 그런데 선분 $\overline{BC}$ 에 있는 점에서 함수 $f(x, y) = x + y$ 의 값은 모두 같으므로 일차함수 $f(x, y) = x+y$ 는 꼭지점 B 또는 꼭지점 C 에서 최대값을 갖는다고 해도 틀린 말이 아니다.

그러므로 다음 사실을 알 수 있다:

> 연립일차부등식을 만족시키는 영역에서 정의된 일차함수는 그 영역의 꼭지점에서 최대값, 최소값을 갖는다.

연습문제

1. xy 평면에서 다음 연립일차부등식을 만족하는 영역을 그려라.

   a) $x \geq 2, \quad y \leq 3.$

   b) $1 \leq x \leq 3, \quad 2 \leq y \leq 4.$

   c) $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 2x + y - 5 \leq 0.$

   d) $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 2x + 3y \geq 31, \quad 5x + 4y \geq 60.$

   e) $y \leq 3x - 2, \quad 2y \geq x + 1, \quad y \leq -2x + 8.$

2. 다음 그림의 영역을 연립부등식으로 나타내고, 또 모서리의 식을 구하여라.

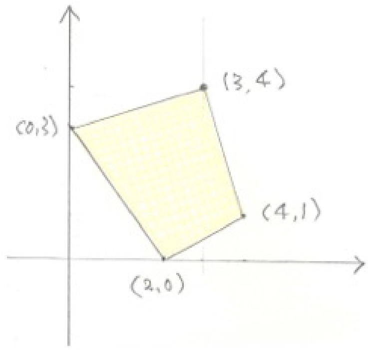
3. 연립부등식

$$3x + y \leq 9, \quad x + 2y \leq 8, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

   이 나타내는 영역을 구하고, 이 영역에서 일차함수

$$3x + 2y$$

   의 최소값과 최대값을 구하여라.



4. 연립부등식

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 2x + 3y - 6 \leq 0, \quad 2x - y + 1 \geq 0$$

이 나타내는 영역을 구하고, 이 영역에서 일차함수

$$x - y$$

의 최소값과 최대값을 구하여라.

5. 다음 연립부등식이 나타내는 영역을 xyz 공간에 나타내어라.

   a) $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x + 2y + 3x \leq 6.$

   b) $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x + 2y + 3x \leq 6, \quad 2x + 3y + 6z - 6 \geq 0.$

6. 위의 5번 문제의 영역은 xyz 공간에 있는, 속이 차 있는 볼록다면체를 나타낸다. 이 영역의 면, 모서리, 꼭지점을 식으로 나타내어라.

제 7 장

심플렉스 방법

선형계획법에서 다루는 문제들은 여러 개의 일차부등식 또는 일차방정식을 만족시키는 영역에서의 일차식의 최대값 또는 최소값을 구하는 것들이라는 것을 안다. 이러한 문제를 푸는 체계적인 방법 또는 알고리즘으로서 Dantzig[1] 가 고안해낸 심플렉스 방법이라는 것이 있는데, 이는 계산 수학에서 가장 위대한 발견 중의 하나로 여겨진다. 여기에서는 이 방법의 기본적인 아이디어를 설명한다.

1) George Dantzig, 1914-2005, 미국.

7.1 하나의 보기

제약조건이

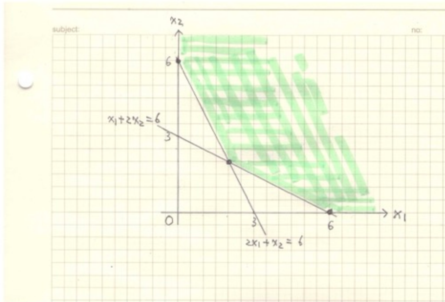
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 + 2x_2 \geq 6, \quad 2x_1 + x_2 \geq 6$$

일 때, **비용함수**[2)]

$$x_1 + x_2$$

의 최소값을 구하는 문제를 이용하여, 심플렉스 방법을 이해하는데 필요한 용어들을 먼저 설명하겠다. 먼저 제약조건을 만족시키는 영역을 그려보면 다음과 같다:

2) 목적함수의 또다른 이름이라고 생각하면 된다.



이처럼, 제약조건을 만족시키는 집합을 **가능영역**이라고 부른다. 위의 그림은 가능영역을 그림으로 나타낸 것이다. 이처럼 연립일차부등식을 만족시키는 점 들의 집합은 그 경계가 직선의 일부분으로 이루어진, 볼록다각형을 이룬다. 이 볼록다각형은 그림처럼 유계가 아닌 집합일 수도 있다.

이러한 문제의 최소값은 제약조건을 만족하는 영역의 꼭지점에서의 값이라는 것을 안다. 그러므로 비용함수의 가능 영역의 꼭지점에서의 값들 만을 계산하여 그 중에서 원하는 최소값을 찾는 것이 이런 문제를 보다 효율적으로 풀 수 있는 방법이 될 것이다. 그런데 지금의 보기에서처럼 가능영역을 그릴 수 있으면 꼭지점이 어떤 점인지 알 수 있지만, 이와 같은 문제에서 변수도 여러 개이고 제약조건의 일차부등식도 여러 개라고 상상을 해 보면, 위와 같은 그림을 구하는 것이 매우 귀찮고 쉽지 않은 일일 것이라는 것을 상상할 수 있을 것이다. 변수의 개수가 예를 들어서 4개 이상이면 가능영역을 그리는 것은 불가능할 것이다. 그래서, 그림을 보지 않고 꼭지점을 어떻게 계산할 수 있을까를 생각해 보기로 하자.

그러면 어떤 점이 꼭지점인가? 그것은 모서리들이 만나는 점일 터인데, 그렇다면 모서리란 무엇인가? 모서리란, 하나의 직선의 일부분인데, 부등식으로 주어져있는 제약조건의 하나를 등식으로 바꾸면 그 직선을 얻을 수 있다. 그러므로,

꼭지점이란, 제약조건을 등식으로 바꾸어서 얻는 직선들의 교점

이라는 것을 알 수 있다. 앞의 보기에서

- 점 $O(0,0)$ 은 두 일차방정식 $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ 의 해이고
- 점 $A(3,0)$ 은 두 일차방정식 $x_2 = 0,\ 2x_1 + x_2 = 6$ 의 해이고,

- 점 $B(6,0)$ 은 두 일차방정식 $x_2 = 0,\ x_1 + 2x_2 = 6$ 의 해이고,
- 점 $C(2,2)$ 은 두 일차방정식 $2x_1 + x_2 = 6, x_1 + 2x_2 = 6$ 의 해이고
- 점 $D(0,3)$ 은 두 일차방정식 $x_1 = 0, x_1 + 2x_2 = 6$ 의 해이고,
- 점 $E(0,6)$ 은 두 일차방정식 $x_1 = 0, 2x_1 + x_2 = 6$ 의 해이다.

제약조건이 결정하는 직선 들의 교점을 계산하였는데, 이들이 우리가 꼭지점이라고 부르려고 하는 점들의 후보자 들이다. 이들 중에서 가능영역에 있는 점 들은

$$B(6,0),\ C(2,2),\ E(0,6)$$

인데, 이와 같이 가능영역에 있는 꼭지점을 **진짜꼭지점**이라고 부른다. 이에 반해서, 점 $O(0,0), A(3,0), D(0,3)$ 은 가능영역에 있지 않은 점이므로 진짜꼭지점이라고 할 수 없다. **가짜꼭지점**이라고 부르면 되겠다.

제약조건에 있는 두개의 부등식을 방정식으로 바꾸어서 (진짜이건 가짜이건) 꼭지점을 찾았는데, 그런 방정식 중에는

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

와 같이 생긴 것이 있고 또

$$x_1 + 2x_2 = 6, \quad 2x_1 + x_2 = 6$$

와 같이 생긴 것도 있다. 이제

$$\begin{aligned} z_1 &:= x_1 + 2x_2 - 6, \\ z_2 &:= 2x_1 + x_2 - 6 \end{aligned}$$

과 같이 새로운 변수

$$z_1, z_2$$

를 도입하면, 제약조건을 다음과 같이 나타낼 수 있게 된다:

$$x_1, x_2, z_1, z_2 \geq 0.$$

이와 같은 변수 z_1, z_2 를 **슬랙변수** 또는 여유변수라고 부른다.

앞에서 꼭지점을 찾기 위한 계산과정을 살펴보면, 그것은 슬랙변수를 포함한 네 개의 변수 x_1, x_2, z_1, z_2 중에서

$$2\text{개} = 0$$

을 계산한 것인데, 이와 같이 0 으로 놓는 변수를 **자유변수**라고 부르고, 자유변수를 택했을 때의 나머지의 변수들을 **기저변수**라고 부른다. 앞의 꼭지점의 계산과정을 다시 살펴보면

- 점 $O(0,0)$ 은 자유변수 x_1, x_2 가 결정하는 점인데, 이때의 기저변수의 값은 $z_1 = -6, z_2 = -6$ 이다.
- 점 $A(3,0)$ 은 자유변수 x_2, z_2 가 결정하는 점인데, 이때의 기저변수의 값은 $x_1 = 3, z_1 = -3$ 이다.
- 점 $B(6,0)$ 은 자유변수 x_2, z_1 이 결정하는 점인데, 이때의 기저변수의 값은 $x_1 = 6, z_2 = 6$ 이다.
- 점 $C(2,2)$ 은 자유변수 z_1, z_2 가 결정하는 점인데, 이때의 기저변수의 값은 $x_1 = 2, x_2 = 2$ 이다.
- 점 $D(0,3)$ 은 자유변수 x_1, z_1 이 결정하는 점인데, 이때의 기저변수의 값은 $x_2 = 3, z_2 = -3$ 이다.
- 점 $E(0,6)$ 은 자유변수 x_1, z_2 가 결정하는 점인데, 이때의 기저변수의 값은 $x_2 = 6, z_1 = 6$ 이다.

여기에서도 알 수 있듯이, 자유변수를 결정하면 기저변수가 결정될 뿐만 아니라, 기저변수의 값도 결정되게 된다. 그런데

$$\text{기저변수의 값} \geq 0$$

인 점 들만이 진짜꼭지점이다. 왜냐하면 계산한 점이 가능영역에 있기 위해서는

$$\text{슬랙변수를 포함한 모든 변수} \geq 0$$

이어야 하기 때문이다. 앞에서, 점 O, A, D 는 이 기준을 만족시키지 못하므로 진짜 꼭지점이 될 수 없다.

이제, 지금까지의 설명을 다음과 같이 요약할 수 있겠다:

- 슬랙변수를 도입하면, 제약조건이

  $$\text{슬랙변수를 포함한 모든 변수} \geq 0$$

  와 같이 표시된다,

- 꼭지점의 후보자 들은, 슬랙변수를 포함하여

$$\text{몇 개의 변수} = 0$$ [3]

  을 만족하는 점이다.

- 자유변수를 지정하면 진짜꼭지점의 후보자들을 찾을 수 있다.

- 진짜꼭지점의 후보자들 중에서

$$\text{기저변수의 값} \geq 0$$

  인 점 들만이 진짜꼭지점이다.

보기 7.1. 제약조건이

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + 2x_2 \geq 6,\ 2x_1 + x_2 \geq 6$$

일 때 비용함수

$$f(x_1, x_2) := x_1 + x_2$$

의 최소값을 구해 보자.

이 단원을 시작할 때 주어진 문제인데, 고의로 부등식을 만족시키는 영역을 그리지 않고 계산해 보겠다.

먼저 슬랙변수 z_1, z_2 를 도입한다:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + 2x_2 - 6, \\ z_2 &= 2x_1 + x_2 - 6. \end{aligned}$$

그러면 가능영역의 식은 간단히

$$x_1,\ x_2,\ z_1,\ z_2 \geq 0$$

이 된다. 이제 꼭지점을 찾는다.

1. $x_1 = 0, x_2 = 0$ 이면 $z_1 = -6, z_2 = -6$ 이어서 이 점은 가능영역에 있지 않은 가짜꼭지점이다. 이 꼭지점의 좌표는 $(0, 0)$ 이다.

3) "몇 개"인가는 문제에 따라서 달라진다. 만일 $\mathbb{R}^3$ 에서 생각한다면 3개일 것이고, $\mathbb{R}^n$ 에서 생각한다면, n 개일 것이다.

2. $x_1 = 0, z_1 = 0$ 이면, $x_2 = 3, z_2 = -3$ 이어서 이 점은 가능영역에 있지 않은 가짜꼭지점이다. 이 꼭지점의 좌표는 $(0,3)$ 이다.

3. $x_1 = 0, z_2 = 0$ 이면, $x_2 = 6, z_1 = 6$ 이어서 이 점은 가능영역에 있는 진짜꼭지점이다. 이 꼭지점의 좌표는 $(0,6)$ 이다.

4. $x_2 = 0, z_1 = 0$ 이면, $x_1 = 6, z_2 = 6$ 이어서 이 점은 가능영역에 있는 진짜꼭지점이다. 이 꼭지점의 좌표는 $(6,0)$ 이다.

5. $x_2 = 0, z_2 = 0$ 이면, $x_1 = 3, z_1 = -3$ 이어서 이 점은 가능영역에 있지 않은 가짜꼭지점이다. 이 꼭지점의 좌표는 $(3,0)$ 이다.

6. $z_1 = 0, z_2 = 0$ 이면, $x_1 = 2, x_2 = 2$ 이어서 이 점은 가능영역에 있는 진짜꼭지점이다. 이 꼭지점의 좌표는 $(2,2)$ 이다.

다시 말하면, 순서대로, 자유변수 x_1, x_2 가 결정하는 꼭지점은 가짜꼭지점, 자유변수 x_1, z_1 가 결정하는 꼭지점은 가짜꼭지점, 자유변수 x_1, z_2 가 결정하는 꼭지점은 진짜꼭지점, 자유변수 x_2, z_1 가 결정하는 꼭지점은 진짜꼭지점, 자유변수 x_2, z_2 가 결정하는 꼭지점은 가짜꼭지점, 자유변수 z_1, z_2 가 결정하는 꼭지점은 진짜꼭지점이다.

이제 진짜꼭지점에서의 목적함수 값을 각각 계산해보면

$$f(0,6) = 6,\ f(6,0) = 6,\ f(2,2) = 4$$

이므로 구하는 최소값은 4 이다.

7.2 Danzig 의 생각

이제, 진짜꼭지점을 찾는 방법을 알았다. 그러므로 진짜꼭지점을 모두 찾은 다음에 그 점에서의 목적함수 값을 모두 찾고 그 중에서 가장 작은 값을 찾으면, 최소값을 찾아낸 것이다. 앞의 보기에서 그렇게 구하였다. 그런데 이렇게 생각할 수도 있다. 어차피 최소값을 갖게끔 하는 진짜꼭지점 하나만 찾으면 되는 것인데 진짜꼭지점을 모두 찾아서 계산한다는 것은 낭비 아닌가? 변수의 개수가 매우 많으면 이것은 심각한 문제가 될 것이다. 그래서 Dantzig 는 다음과 같이 생각하였다:

> 진짜꼭지점을 하나 찾았다고 가정하자. 이 점에서의 목적함수의 값이 최소값일 수도 있고 아닐 수도 있는데, 최소값이 아니라면 적당한 모서리를 따라서 다른 꼭지점으로 이동하여 그 꼭지점에서의 목적함수의 값을 계산하고... 이런 과정을 반복하는 것이 계산의 양을 줄이는 보다 효과적인 방법이 될 지도 모른다.....

음, 좋은 생각인 것 같다.... 그런데 이러한 생각이 제법한 것이 되기 위해서는

- 현재의 꼭지점에서의 목적함수의 값이 최소값인지 아닌지를 판정하는 방법
- 만일 현재 꼭지점에서의 목적함수의 값이 최소값이 아니라면
  - 어떤 모서리를 따라서 이동하여야 진짜꼭지점에 도착하는지를 알아내는 방법
  - 모서리를 따라서 이동하여 도착한 새로운 진짜꼭지점에서의 목적함수의 값이 줄어들도록 이동하는 방법

등을 알 수 있어야 할 것이겠다.

이제, 우리의 보기를 이용하여 Danzig 의 방법을 알아보자.

앞에서 도입한 슬랙변수 z_1, z_2 를 x_3, x_4 로 쓰면, 가능영역은

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

이고 목적함수는

$$x_1 + x_2$$

이다. 슬랙변수를 특별히 구별하지 않기 위해서라고 생각해도 되겠다. 슬랙변수를 정하는 식을 정리하면

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 &= 6 \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

이 된다. 이와 같은 식을 **등식조건**이라고 부른다.

1. 심플렉스 방법은 진짜 꼭지점을 하나 찾은 다음 그 점에서 시작하는데, 그 꼭지점을 결정하는 자유변수가 x_1, x_4 라고 하자. 그러므로 진짜꼭지점 $(0, 6)$ 에서 시작하는 것이다.

   먼저 목적함수를 이 자유변수로 나타낸다. 등식조건을 이용하면 그렇게 할 수 있다. 그러면

   $$\text{목적함수} = f(x_1, x_4) = -x_1 + x_4 + 6$$

   이 된다. 이렇게 자유변수로 목적함수를 나타내면 다음을 알 수 있다.

   a) 그 꼭지점에서의 목적함수의 값

      이 꼭지점은 $x_1 = x_4 = 0$ 인 점이므로 이 꼭지점에서의 목적함수의 값은 $f(0, 0) = 6$ 이다.

   b) 이 꼭지점에서의 목적함수의 값이 최소값인지 아닌지 알 수 있다.

      만일 이 꼭지점을 떠난다면, x_1, x_4 값은 바뀔 터인데, 바뀌는 값은, 가능영역에 있기 위해서는 ≥ 0 이어야 한다. 그러면 x_4 의 값은 0 으로 그대로 있고, x_1 값만 양수로 바꾸어 보자. 그러면, 목적함수의 x_1 의 계수는 음수이므로, 목적함수의 값은 줄어들게 된다. 그러므로 현재의 꼭지점에서의 목적함수의 값은 최소값이 아니다.

   여기에서, x_4 의 값은 0 으로 그대로 있고, x_1 값만 양수로 바꾼다는 것은, 꼭지점 $x_1 = x_4 = 0$ 을 지나는 적당한 모서리를 따라서 가는 것과 같겠다. 그 모서리를 나타내는 식은

   $$x_4 = 0$$

   일 것이다.

2. 이 꼭지점에서의 목적함수의 값이 최소값이 아님을 알았으므로, 이제 다른 꼭지점으로 이동하려고 하는데, 아무렇게나 이동하는 것이 아니고 현재의 꼭

지점을 지나는 적당한 모서리를 따라서 이동하되, 목적함수의 값이 줄어들도록 이동한다. 모서리를 따라서 다른 꼭지점으로 이동한다는 것은 현재의 꼭지점을 정의하는 2개의 자유변수 중에서 하나는 여전히 자유변수가 되고, 나머지 하나의 자유변수는 기저변수가 된다는 말인데, 목적함수의 값이 줄어들려면, 위에서 설명한 대로 x_4 가 그대로 자유변수로 있고, x_1 이 기저변수가 되어야 한다. 이렇게 어떤 자유변수가 기저변수가 되어야 하는지를 알았다. 그러면 이제, 기저변수 중에 하나는 자유변수가 되어야 할 것이다. 그러면 현재의 기저변수 x_2, x_3 중에서 어떤 것이 자유변수가 되어야 할 지를 알아보기 위해서, 등식조건 (7.2.1)을 적당히 다시 써서 각각의 기저변수를 자유변수로 나타내어 보자.[4)] 그러면

$$\begin{aligned} x_3 + 3x_1 - 2x_4 &= 6, \\ x_2 + 2x_1 - x_4 &= 6, \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

이다.

a) 만일, x_2 가 자유변수가 된다면, 새로이 옮겨가는 꼭지점을 정의하는 자유변수는 x_2, x_4 이고 이때, x_1 은 기저변수가 되는데 그때의 기저변수 x_1 의 값은 두번째 식에 $x_2 = x_4 = 0$ 을 대입하면 알 수 있다. 그러면

$$x_1 = 3$$

이다. 그런데, 이때, 즉, $x_1 = 3, x_2 = x_4 = 0$ 일 때, 나머지 변수 x_3 의 값을 계산해 보면 첫번째 식으로부터 $x_3 = -3$ 로서 음수이다. 그러므로 옮겨가는 새로운 꼭지점은 진짜꼭지점이 아닌 가짜꼭지점이다.

b) 만일, x_3 가 자유변수가 된다면, 새로이 옮겨가는 꼭지점을 정의하는 자유변수는 x_3, x_4 이고 이때, x_1 은 기저변수가 되는데 그때의 기저변수 x_1 의 값은 첫번째 식에 $x_3 = x_4 = 0$ 을 대입하면 알 수 있다. 그러면

$$x_1 = 2$$

이다. 그런데, 이때, 즉, $x_1 = 2, x_3 = x_4 = 0$ 일 때, 나머지 변수 x_2 의 값을 계산해 보면 $x_2 = 2$ 이다. 그러므로 옮겨가는 새로운 꼭지점은 진짜꼭지점이다.

4) 식 (7.2.1)의 두 번째 식에서, 기저변수 x_2 는 이미 자유변수 x_1, x_4 로 쓰여 있으니까 되었고, 이 식을 첫 번째 식에 대입하여 정리하면, 나머지 기저변수 x_3 도 자유변수 x_1, x_4 로 쓰이게 된다.

그래서 x_3 가 자유변수가 되어야 한다. 다시 말하면, 새로이 옮겨가는 꼭지점을 정의하는 자유변수는 x_3, x_4 이어야 한다. 이 점의 좌표는 $(x_1, x_2) = (2, 2)$ 이다.

3. 이제 우리는 새로운 진짜꼭지점 $x_3 = x_4 = 0$ 에 있다. 이 점이 최소값을 갖게끔하는 점인지 아닌지를 알아 보기 위해서 목적함수를 자유변수 x_3, x_4 로 나타내어 본다.[5] 그러면 목적함수는
$$g(x_3, x_4) = \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + 4$$
이고 이 꼭지점에서의 목적함수의 값은
$$g(0, 0) = 4$$
이다. 특히, 목적함수의 x_3, x_4 의 계수가 모두 양수이다. 만일 이 꼭지점을 점을 떠난다면, x_3 또는 x_4 의 값은 양수가 되어야 할 터인데[6] 그때의 목적함수의 값은 x_3, x_4 의 계수가 모두 양수이므로 $g(0, 0)$ 보다 커지게 된다. 그러므로 이 꼭지점에서의 목적함수의 값이 최소값임을 알 수 있다.

이렇게 보기를 이용하여서 Danzig의 생각을 이해하였다. 이 방법을 **심플렉스 방법**이라고 부르는데, 이렇게 부르는 까닭은, 가능영역이 나타내는 볼록다각형이나 볼록다면체와 같은 것을 고급 용어로 심플렉스(simplex)라고 부르기 때문이다. Danzig는 심플렉스의 꼭지점과 모서리에서의 값 만을 생각하였는데, 등장하는 모든 식이 일차식이기 때문에 가능한 생각이다.

이 방법은 그 꼭지점에서의 목적함수 값이 최소값인지 아닌지를 판정하는 방법을 알려줄 뿐만 아니라, 최소값이 아닐 때에는 어떻게 꼭지점을 바꾸어야 하는지도 알려주는데, 이때의 기본적인 테크닉은

중요한 양들을 자유변수로 나타내는 것

이라고 하겠다. 특히 자유변수로 나타낸 목적함수에서 자유변수의 계수가 모두 양수이면 최소값을 갖게 되어서 이 과정이 끝나게 되는데, 이 조건, 즉

자유변수로 나타낸 목적함수에서 자유변수의 계수가 모두 양수

5) 이렇게 하기 위해서는, 등식조건을 이용하여서 x_1, x_2 를 x_3, x_4 로 나타내면 된다.
6) 가능영역에 있어야 하므로

인 것을 **정지조건**이라고 한다.

7.3 행렬의 조작

진짜꼭지점을 하나 찾은 다음에 거기에서 심플렉스 방법을 시작하는데, 가장 핵심적인 과정은

목적함수를 그 꼭지점을 정하는 자유변수 들로서 나타내는 것

이라고 하겠다. 그러면 꼭지점에서의 목적함수 값을 알 수 있을 뿐만 아니라, 더욱 중요한 것으로서 그 꼭지점에서의 값이 최소값인지 아닌지도 알 수 있었고, 최소값이 아닌 경우에는 어떤 모서리를 따라서 이동하여서 꼭지점을 옮겨 가야 목적함수의 값이 작아지는지도 알 수 있었다. 그러므로 목적함수를 그 꼭지점을 정하는 자유변수 들로서 나타내는 과정을 체계적으로 정리할 수 있으면 좋을 것이다.

행렬을 사용하여서 이 과정을 체계적으로 정리하는 과정을 앞의 보기를 이용하여 설명한다.

1. 앞의 등식조건 (7.2.1)을 행렬로 쓰면

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

이고 목적함수를 나타내면

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

이다. 이것을 행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.3.1}$$

으로 나타내자. 목적함수를 나타내는 벡터가 맨 아래의 행에 있는데, 그 행의 마지막에 0 이 덧붙여져 있음에 주의하여라.

2. 이제 자유변수 x_1, x_4 가 정하는 진짜꼭지점에서 시작한다.[7)]

   a) 여기에서 자유변수는 x_1, x_4 이고 기저변수는 x_2, x_3 인데, 등식조건 방정식과 목적함수를 기저변수 x_2, x_3 가 먼저 나오고 자유변수 x_1, x_4 가 나중에 나오도록 변형하여 쓴다면

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

   가 되는데 이것을 행렬

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.3.2}$$

   로 쓰자. 행렬 (7.3.1)과 행렬 (7.3.2)를 비교하여 보면 1열과 3열이 마주 바뀌어 있는데, 이것은 x_1 과 x_3 가 서로 마주 바뀌었기 때문이다.

   b) 현재의 자유변수는 x_1, x_4 이고 기저변수는 x_3, x_2 인데, 다음과 같이 기저변수를 자유변수로 표시할 수 있다:

7) 이 꼭지점은 어떻게 찾는가 하는 의문이 있을 수 있는데, 그 방법은 여기에서는 설명하지 않는다.

행렬 (7.3.2)의 처음 2행은 다음과 같은 방정식을 나타내는데[8)]

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

이로부터 다음을 얻는다:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \\ \Rightarrow \quad & \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \quad & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

뿐만 아니라 현재의 목적함수 $x_1 + x_2$ 도 자유변수로만 쓸 수 있다:

바로 위의 식에서

$$x_2 + 2x_1 - x_4 = 6 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 6 - 2x_1 + x_4$$

8) 다음과 같이 계산할 수 있기 때문이다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이므로 목적함수는

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= x_1 + (6 - 2x_1 + x_4) \\ &= -x_1 + x_4 + 6 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} + 6 \end{aligned}$$

이 된다.

3. (2)의 과정을 행렬로 쓰면 다음과 같겠다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 \end{bmatrix}. \tag{7.3.3}$$

이 행렬이 꼭지점 $x_1 = x_4 = 0$ 에서의 최종적인 행렬이다.[9] 세 번째 행의 마지막 성분에 쓰여있는 -6 은 현재의 꼭지점에서의 목적함수 값 6 의 마이너스임에 주의하여라.[10]

4. 행렬 (7.3.3)에서 목적함수를 나타내는 마지막 행에 음수가 있으므로, 현재의 꼭지점에서의 값이 최소값이 아님을 알 수 있고, 뿐만 아니라 목적함수 값이 줄어들도록 꼭지점을 바꾸려면 음수 성분이 나타내는 변수 x_1 이 기저변수가 되어야 함을 안다. 그런데 음수가 있는 열 $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ 와 제약조건을 나타내는 마지막

9) 앞의 두 열은 현재의 꼭지점에서의 등식조건과 목적함수에 대한 기저변수의 계수 들을 나타내고, 뒤의 두 열은 자유변수의 계수 들을 나타내는데, 현재의 꼭지점에서의 심플렉스 행렬이 완성되려면 이처럼

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

꼴이어야 한다.

10) 이 행렬에서 처음의 두 행은 방정식을 나타내는데, 마지막 행은 그렇지 않다. 방정식이 아니라 목적함수

$$-x_1 + x_4 + 6$$

을 나타낸다.

열 $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$ 의 대응되는 성분 들의 비를 비교해 보았더니

$$\frac{6}{3} < \frac{6}{2}$$

이므로 기저변수 x_3, x_2 중에서 먼저 쓰여있는 변수 x_3 가 자유변수가 되어야 함을 안다.[11)]

5. 그래서 새로운 진짜꼭지점은 자유변수 x_3, x_4 가 정하는 꼭지점이다.

   a) 이 새로운 꼭지점에서도 기저변수 x_1, x_2 가 먼저 나오고 자유변수 x_3, x_4 는 나중에 나오도록 바꾸어 쓴다. 그러기 위해서는 행렬 (7.3.3)에서 1 열과 3열을 마주 바꾸면 된다.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}. \tag{7.3.4}$$

   이 식에서 처음 두 행은 방정식

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{7.3.5}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{7.3.6}$$

   을 나타내고 마지막 행은 목적함수

$$-x_1 + x_4 + 6$$

   을 나타낸다.

   b) 목적함수 $-x_1+x_4+6$ 가 자유변수 x_3, x_4 로 쓰여 있지 않다. 목적함수를 자유변수로 쓰려면, 먼저 기저변수를 자유변수로 나타내야 할 것이다.

11) 앞에서 식 (7.2.2) 아래의 계산을 참고하면 좋다.

그런데 앞의 식에서

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} x_3 - 2x_4 \\ -2x_3 + x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

이고, 그러므로 목적함수 $-x_1 + x_4 + 6$ 를 자유변수 x_3, x_4 로 쓰면

$$-x_1 + x_4 + 6 = -\left(2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4\right) + x_4 + 6 = \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x + 4$$

이다. 자유변수 x_3, x_4 의 계수가 모두 양수이므로, 이 꼭지점에서의 목적함수의 값이 최소값이 됨을 알 수 있다. 최소값은 4 이다. 이 꼭지점의 좌표를 알고 싶으면, 이 꼭지점에서의 (x_1, x_2) 값을 알면 되고, 실제로

$$(x_1, x_2) = (2, 2)$$

이다. 이로서 심플렉스 과정은 끝이 나는데, 마지막 과정의 결과를 행렬로 쓴다면 다음과 같다:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -4 \end{bmatrix}.$$

최소값은 이 행렬의 오른쪽 아래 귀퉁이에 있는 값의 마이너스 $-(-4) = 4$ 이다.

보기 7.2. 일차부등식

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 + 2x_2 \geq 2, \quad x_1 + x_2 \leq 4$$

을 만족시키는 영역에서 일차함수

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

의 최소값을 구하는 문제를 행렬을 사용하여 풀어보자.

1. 첫번째 단계는 슬랙변수를 도입하는 것인데, 이 최소값 문제가 표준형이 되도록 다음과 같이 슬랙변수를 도입한다:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_1 + 2x_2 - 2, \\ x_4 &= 4 - x_1 - x_2. \end{aligned}$$

그러면 등식조건은

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2,$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 4$$

이고 비용함수는

$$2x_1 + x_2$$

이다. 따라서 이에 대한 행렬은 다음과 같다:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{bmatrix}.$$

변수를 쫓아가기 쉽도록 하기 위해서 마지막 행에 변수 들을 덧붙여 놓았다.

2. 다음 단계는 심플렉스 방법을 시작할 진짜꼭지점을 하나 찾는 것이다. x_2, x_3 를 자유변수로 택하면, 즉

$$x_2 = x_3 = 0$$

이라 하면, $x_1 = 2, x_4 = 2$ 로서 이 점은 진짜꼭지점이다. 여기에서 심플렉스 방법을 시작하겠다. 그러면 자유변수가 뒤로 와야 하므로, 앞의 행렬에서 2, 4열이 서로 바뀐다:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & \end{bmatrix}$$

3. 이제 심플렉스 과정을 거쳐서 행렬을 바꾼다:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -4 \\ x_1 & x_4 & x_3 & x_1 & \end{bmatrix}$$

오른쪽 행렬의 세번째 행이 알려주는 것이 무언가 하면, 목적함수를 자유변수 x_3, x_2 로 나타내면

$$2x_3 - 3x_4 - (-4)$$

이 되므로, 현재의 꼭지점 $x_3 = x_2 = 0$ 에서의 목적함수 값은 *4*라는 것이다.

4. 세 번째 행의 -3 이 있는 열을 보면 $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 인데, 양인 원소는 첫번째 원소 뿐이 없으므로, 오른쪽 행렬에서 *4*열과 *1*열을 바꾼다:[12]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -4 \\ x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ x_2 & x_4 & x_3 & x_1 & \end{bmatrix}.$$

그리고 다시 심플렉스 과정을 거쳐서 오른쪽 행렬을 바꾼다:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ x_2 & x_4 & x_3 & x_1 & \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ x_2 & x_4 & x_3 & x_1 & \end{bmatrix}.$$

목적함수를 나타내는 *3*행에 음의 성분이 없으므로, 심플렉스 과정은 끝이 나는데, 마지막 표의 *3*행이 알려주는 것은, 목적함수는

$$\frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_1 + 1$$

이고 최소값은 *3*행의 마지막 원소의 마이너스 값 $-(-1) = 1$ 이라는 것이다. 최소값을 갖게 되는 점은 $x_3 = x_1 = 0$ 인 점으로서 그 점의 좌표를 구하면 $(x_1, x_2) = (0, 1)$ 이다.

행렬을 이용하여 심플렉스 방법을 체계적으로 따라오는 과정을 살펴 보았다. 심플렉스 방법을 체계적으로 구현한 맨 처음의 방법이라고 하는데, 위의 설명과 보기가 행렬을 이용하는 방법을 완전히 보여준 것은 아니지만 심플렉스 방법의 기본적인 아이디어를 이해하기에는 충분하기를 바란다. 보다 자세한 과정은 심플렉스 표를 이용하여 나중에 설명하겠다.

12) 두번째 원소는 음수라서 무시했는데, 그 까닭은 다음과 같다: 만일 x_4 가 자유변수가 된다면, x_3 는 여전히 자유변수일 것이므로 두번째 행이 알려주는 식

$$x_4 + x_3 - x_2 = 2$$

으로부터

$$0 + 0 - x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2$$

가 되어서, 새로운 꼭지점은 진짜꼭지점이 되지 못하기 때문이다.

연습문제

1. 제약조건
$$x+2y \geq 6, \quad 2x+y \geq 6, \quad x,y \geq 0$$
에 대해서
   a) 가능영역을 그려라.
   b) 슬랙변수 $u := x-2y-6, v := 2x+y-6$ 를 도입하여, 등식조건을 쓰고
      i. x,y,u,v 중에서 두개의 변수가 자유변수일 때, 그 자유변수가 결정하는 꼭지점이 진짜꼭지점인지 가짜꼭지점인지 밝혀라.
      ii. 세 개의 꼭지점
      $$(0,6), \quad (2,2), \quad (6,0)$$
      에 해당하는 x,y,u,v 의 좌표를 각각 구하여라.
2. 다음 제약조건의 가능영역은 공집합 임을 보여라.
$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 2x+5y \leq 3, \quad -3x+8y \leq -5.$$
3. 다음 제약조건에서 목적함수 $x+y$ 의 최대값은 ∞ 임을 보여라.
$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad -3x+2y \leq -1, \quad x-y \leq 2.$$
4. 다음 제약조건에서 함수 $6x+3y$ 가 최대값을 갖게끔 하는 점은 모서리에 있음을 보여라.
$$x+3y \leq 8, \quad 2x+y \leq 10, \quad x,y \geq 0.$$
5. $x \geq 0,\ y \geq 0$ 이라는 조건에 단 하나 만의 부등식을 추가하여 가능영역이 한 점으로만 이루어지도록 하여라.
6. 다음 제약조건이 만드는 가능영역을 그려라. 이 가능영역에서의
$$x+2y+3z$$
의 최소값과 최대값은 무엇인가? 최소값과 최대값은 각각 어떤 꼭지점에서 갖는가? 그 꼭지점의 좌표를 구하여라.
$$x,y,z \geq 0, \quad x+2y+3z \leq 1.$$

7. 제약조건이

$$
\begin{aligned}
3y_1 + 2y_2 + 3y_3 &\geq 10, \\
4y_1 + 3y_2 + 5y_3 &\geq 12, \\
y_1, y_2, y_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

일 때, 함수

$$5y_1 + 6y_2 + 7y_3$$

의 최소값을 구하려고 한다. 슬랙변수

$$
\begin{aligned}
y_4 &:= 3y_1 + 2y_2 + 3y_3 - 10, \\
y_5 &:= 4y_1 + 3y_2 + 5y_3 - 12
\end{aligned}
$$

를 도입하여서 가능영역의 진짜꼭지점을 모두 찾아라. 그리고 최소값을 구하여라.

8. 비용이 $2x + 3y$ 이고 제약조건이

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + 2y \geq 4$$

인 최소값 문제를, 꼭지점 $(0, 4)$ 에서 시작하되 행렬을 조작하여 풀어라.

9. 비용함수가

$$12x_1 + 16x_2$$

이고, 제약조건이

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\geq 40, \\
x_1 + x_2 &\geq 30, \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

인 최소값 문제를, 심플렉스 방법을 사용하여서 행렬을 조작하여 풀되, 점 $(40, 0)$ 이 진짜꼭지점인지를 확인하고, 이 점에서 시작하여라.

10. 다음 조건

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\geq 6, \\
x_2 + 2x_3 &\geq 8, \\
-x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\geq 4, \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

을 만족하는 영역에서

$$2x_1 + 10x_2 + 8x_3$$

의 최소값을 구하되 행렬을 조작하여서 구하여라.

제 8 장

변수 맞바꾸기

> 선형계획법에서 다루는 문제들은 여러개의 일차부등식 또는 일차방정식을 만족시키는 영역에서의 일차식의 최대값 또는 최소값을 구하는 것들이라는 것을 안다. 이러한 문제를 푸는 체계적인 방법으로서 Dantzig가 고안해낸 심플렉스 방법의 기본적인 생각을 살펴 보았다. 심플렉스 방법의 과정에는, 자유변수와 기저변수가 서로 바뀌는 과정이 있는데 이제부터는 이 과정에 주목하여서 표를 이용하여 심플렉스 방법을 사용하는 방법을 알아 본다.

연립일차방정식을 행렬을 이용하여 나타낼 수 있는데, 예를 들어서

$$a + 2b = 5,$$
$$3a + 4b = 6$$

를 다음과 같이 두 가지 방법으로 나타낼 수 있음에 주의하기 바란다.

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

8.1 일차관계식 $\mathbf{y}^T A = \mathbf{s}^T$

변수 $y_1, \cdots, y_m$ 과 변수 $s_1, \cdots, s_n$ 사이의 다음과 같은 일차관계식을

$$\begin{aligned} y_1 a_{11} + y_2 a_{21} + \cdots + y_m a_{m1} &= s_1 \\ y_1 a_{12} + y_2 a_{22} + \cdots + y_m a_{m2} &= s_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ y_1 a_{1n} + y_2 a_{2n} + \cdots + y_m a_{mn} &= s_n \end{aligned}$$

을 다음과 같은 $m \times n$ 행렬

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

을 이용하여 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다

$$\mathbf{y}^T A = \mathbf{s}^T,$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_m \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} s_1 & \cdots & s_n \end{bmatrix}.$$

보기 8.1. 일차관계식

$$\begin{aligned} 3y_1 + 2y_2 \qquad &= s_1 \\ y_1 - 3y_2 + 3y_3 &= s_2 \\ 5y_1 + y_2 + y_3 &= s_3 \end{aligned}$$

을 행렬

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{bmatrix}.$$

앞의 관계식에서 상수항 들이 추가된 일차관계식

$$\begin{aligned}
y_1a_{11} + y_2a_{21} + \cdots + y_ma_{m1} + \alpha_1 &= s_1 \\
y_1a_{12} + y_2a_{22} + \cdots + y_ma_{m2} + \alpha_2 &= s_2 \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\
y_1a_{1n} + y_2a_{2n}x_2 + \cdots + y_ma_{mn} + \alpha_n &= s_n
\end{aligned}$$

은 다음과 같은 $(m+1) \times n$ 행렬

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

을 이용하여 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다:

$$\begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_m & 1 \end{bmatrix} \hat{A} = \begin{bmatrix} s_1 & \cdots & s_n \end{bmatrix}.$$

보기 8.2. 일차관계식

$$\begin{aligned}
3y_1 + 2y_2 + 7 &= s_1 \\
y_1 - 3y_2 + 3y_3 + 8 &= s_2 \\
5y_1 + y_2 + y_3 + 9 &= s_3
\end{aligned}$$

을 행렬

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{bmatrix}.$$

보기 8.3. 일차관계식

$$\begin{aligned} 3y_1 + 2y_2 + 7 &= s_1 \\ y_1 - 3y_2 + 3y_3 + 8 &= s_2 \\ 5y_1 + y_2 + y_3 + 9 &= s_3 \end{aligned}$$

은 종속변수 s_1, s_2, s_3 을 독립변수 y_1, y_2, y_3 로 나타낸 것이다.[1] 이제 y_2, s_2, s_3 을 y_1, s_1, y_3 로 나타내어 보자. 다시 말하면, y_2 와 s_1 을 맞바꾸어서 관계식을 나타내겠다는 말이다.

이를 위하여 먼저 첫번째 식을 이용하여 y_2 를 나타내면

$$y_2 = \frac{1}{2}s_1 - \frac{3}{2}y_1 - \frac{7}{2}$$

이고 이것을 나머지의 식에 대입하여 정리하면, 처음의 관계식은 다음과 같은 식이 된다:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}y_1 + \frac{1}{2}s_1 - \frac{7}{2} &= y_2 \\ \frac{11}{2}y_1 - \frac{3}{2}s_1 + 3y_3 + \frac{37}{2} &= s_2 \\ \frac{7}{2}y_1 + \frac{1}{2}s_1 + y_3 + \frac{11}{2} &= s_3 \end{aligned}$$

다시 말하면, 처음에 주어진 일차관계식을

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{bmatrix}$$

와 같이 쓴다면, 나중의 일차관계식은

$$\begin{bmatrix} y_1 & s_1 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 1 \\ -\frac{7}{2} & \frac{37}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 & s_2 & s_3 \end{bmatrix}$$

이 된다는 것이다.

1) 여기에서 독립변수와 종속변수라는 용어는 공인된 용어가 아니다. 마땅한 용어가 없어서 여기에서 만들어낸 것이다.

보기에서 독립변수였던 y_2 를 종속변수로 만드는 동시에 종속변수였던 s_1 을 독립변수로 만드는 과정, 즉 독립변수 y_2 와 종속변수 s_1 의 역할을 맞바꾸는 과정을 설명하였다. 지금부터 이와 같이 독립변수와 종속변수를 맞바꿀 때 일차관계식의 계수들은 어떤 규칙을 따라서 변하게 되는지를 알아 보자.

이제 연립방정식

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}y_1 & +\cdots+ & a_{i1}y_i & +\cdots+ & a_{m1}y_m+ & \alpha_1 & = & s_1 \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
a_{1j}y_1 & +\cdots+ & a_{ij}y_i & +\cdots+ & a_{mj}y_m+ & \alpha_j & = & s_j \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
a_{1n}y_1 & +\cdots+ & a_{in}y_i & +\cdots+ & a_{mn}y_m+ & \alpha_n & = & s_n
\end{array}$$

에서 독립변수 y_i 와 종속변수 s_j 의 역할을 맞바꾸면 어떤 연립방정식을 얻게 되는지 계산해 보겠다. 이를 위하여

$$a_{ij} \neq 0$$

이라고 가정하자. 이제 j 번째 방정식

$$a_{1j}y_1 + \cdots + a_{ij}y_i + \cdots + a_{mj}y_m + \alpha_j = s_j$$

의 양변을 a_{ij} 로 나누어 정리하면

$$y_i = \frac{1}{a_{ij}}(-a_{1j}y_1 - \cdots - a_{(i-1)j}y_{i-1} + s_j - a_{(i+1)j}y_{i+1} - \cdots - a_{mj}y_m - \alpha_j)$$

이다. 이것을 나머지의 식에 대입하여 정리한 것을

$$\begin{array}{cccccccc}
\hat{a}_{11}y_1+ & \cdots & +\hat{a}_{i1}s_j+ & \cdots & +\hat{a}_{m1}y_m & +\hat{\alpha}_1 & = & s_1 \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
\hat{a}_{1j}y_1+ & \cdots & +\hat{a}_{ij}s_j+ & \cdots & +\hat{a}_{mj}y_m & +\hat{\alpha}_j & = & y_i \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
\hat{a}_{1n}y_1+ & \cdots & +\hat{a}_{in}r_j+ & \cdots & +\hat{a}_{mn}y_m & +\hat{\alpha}_n & = & s_n
\end{array}$$ [2)]

이라고 하면 a_{ij}, α_j 와 $\hat{a}_{ij}, \hat{\alpha}_j$ 사이에는 다음 관계가 성립함을 알 수 있다:

2) 식

$$\hat{a}_{1j}y_1 + \cdots + \hat{a}_{ij}s_j + \cdots + \hat{a}_{mj}y_m = y_i$$

는 새로운 식에서 j 번째에 쓰여 있음에 주의하여라.

- 바로 그 자리 [3]:

$$\hat{a}_{ij} = \frac{1}{a_{ij}}$$

- 같은 행[4] $(k \neq j)$:

$$\hat{a}_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{ij}}$$

- 같은 열[5]$(h \neq i)$:

$$\hat{a}_{hj} = -\frac{a_{hj}}{a_{ij}}, \quad \hat{\alpha}_j \frac{\alpha_j}{a_{ij}}$$

- 기타 $(k \neq j,\ h \neq i)$:

$$\hat{a}_{hk} = a_{hk} - \frac{a_{ik}a_{hj}}{a_{ij}}, \quad \hat{\alpha}_h = \alpha_h - \frac{\alpha_i a_{hj}}{a_{ij}}$$

위에서 “바로 그 자리”에 있었던 원소 a_{ij} 를 pivot 이라고 부르는데 위의 규칙이 뜻하는 바는 다음과 같다:

1. Pivot 자리는 역수가 된다.
2. Pivot 과 같은 행의 원소에는 pivot의 역수가 곱해진다.
3. Pivot 과 같은 열의 원소에는 pivot의 역수의 마이너스가 곱해진다.
4. 이도 저도 아닌 원소에는 그 원소가 있는 행과 pivot 이 있는 열이 겹쳐지는 원소 a_{ik} 와 그 원소가 있는 열과 pivot 이 있는 행이 겹쳐지는 원소 a_{hj} 와의 곱 $a_{ik}a_{hj}$ 을 pivot 의 원소로 나눈 것 $\dfrac{a_{ik}a_{hj}}{a_{ij}}$ 를 빼 준다.

$$\begin{array}{ccccc} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & a_{ik} & \cdots \\ & \vdots & & \uparrow & \\ \cdots & a_{hj} & \leftarrow & a_{hk} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \hat{a}_{hk} = a_{hk} - \frac{a_{ik}a_{hj}}{a_{ij}}$$

3) 바로 그 자리란 a_{ij} 의 자리를 말한다.
4) a_{ij} 가 있던 행이다.
5) a_{ij} 가 있던 열이다.

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & & \\ \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & a_{ik} & \cdots & & \\ & \vdots & & \uparrow & & \Rightarrow & \hat{\alpha}_k = \alpha_k - \dfrac{\alpha_j a_{ik}}{a_{ij}} \\ \cdots & \alpha_j & \leftarrow & \alpha_k & \cdots & & \end{array}$$

이제 앞의 과정을 표를 이용하여서 간단하게 나타내는 방법을 알아 보겠다.

먼저, 처음의 일차관계식을 다음과 같이 표를 이용하여 나타내자:

	s_1	$\cdots$	s_j	$\cdots$	s_n
y_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
y_i	a_{i1}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	a_{in}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
y_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}
1	α_1	$\cdots$	α_j	$\cdots$	α_n

여기에서 독립변수 $y_1, \cdots, y_m$ 은 표의 왼쪽에 나타내었고 종속변수 $s_1, \cdots, s_n$ 은 표의 위쪽에 나타내었다. 맨 왼쪽에 있는 독립변수들과 1 로 이루어진 $m+1$ 차원 열벡터 $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \\ 1 \end{bmatrix}$ 와 표의 속에 있는 행렬의 j 번째 열벡터 $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \\ \alpha_j \end{bmatrix}$ 를 내적한 값

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_1 + \cdots + a_{mj}y_m + \alpha_j$$

이 표의 위에 있는 종속변수 중에 j 번째 종속변수인 s_j 를 나타내고 있다고, 즉,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \\ \alpha_j \end{bmatrix} = a_{1j}y_1 + a_{2j}y_1 + \cdots + a_{mj}y_m + \alpha_j = s_j$$

이라고 생각하면 편리하다.[6] 그러면 바뀐 관계식은 다음과 같이 나타낼 수 있겠다.

	s_1	$\cdots$	y_i	$\cdots$	s_n
y_1	$\hat{a}_{11}$	$\cdots$	$\hat{a}_{1j}$	$\cdots$	$\hat{a}_{1n}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
s_j	$\hat{a}_{i1}$	$\cdots$	$\hat{a}_{ij}$	$\cdots$	$\hat{a}_{in}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
y_m	$\hat{a}_{m1}$	$\cdots$	$\hat{a}_{mj}$	$\cdots$	$\hat{a}_{mn}$
1	$\hat{\alpha}_1$	$\cdots$	$\hat{\alpha}_j$	$\cdots$	$\hat{\alpha}_n$

이 표에서, 왼쪽에 독립변수를 나타내는 줄(또는 열)에 있는 s_j 는 위에서 i 번째 자리에 있는 것이고, 반면에 위쪽에 종속변수를 나타내는 행에 있는 y_i 는 왼쪽으로부터 j 번째 자리에 있는 것임에 주의하여라.

이제 앞의 과정, 즉, 독립변수와 종속변수를 마주 바꿀 때 일차관계식이 바뀌는 과정을 표로 나타내면 다음과 같다:

	s_1	$\cdots$	s_j	$\cdots$	s_n
y_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
y_i	a_{i1}	$\cdots$	$\boxed{a_{ij}}$	$\cdots$	a_{in}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
y_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}
1	α_1	$\cdots$	α_j	$\cdots$	α_n

6) 그러므로 이 표는 관계식

$$\mathbf{y}^T A = \mathbf{s}^T$$

를 다른 방법으로 나타낸 것이라고 하겠다.

$$\Rightarrow \begin{array}{|c|ccccc|}\hline & s_1 & \cdots & y_i & \cdots & s_n \\ \hline y_1 & \hat{a}_{11} & \cdots & \hat{a}_{1j} & \cdots & \hat{a}_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_j & \hat{a}_{i1} & \cdots & \hat{a}_{ij} & \cdots & \hat{a}_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m & \hat{a}_{m1} & \cdots & \hat{a}_{mj} & \cdots & \hat{a}_{mn} \\ \hline 1 & \hat{\alpha}_1 & \cdots & \hat{\alpha}_j & \cdots & \hat{\alpha}_n \\ \hline \end{array}$$

이 표에서 pivot a_{ij} 는 $\boxed{a_{ij}}$ 와 같이 상자 속에 표시하였는데 오른쪽 표의 $\hat{a}_{ij}$ 들과 $\hat{\alpha}_i$ 들은 앞에서 설명한 규칙에 따라서 변하게 된다.

보기 8.4. 보기 8.3 의 과정을 표로 나타내면 다음과 같아진다.

$$\begin{array}{|c|ccc|}\hline & s_1 & s_2 & s_3 \\ \hline y_1 & 3 & 1 & 5 \\ y_2 & \boxed{2} & -3 & 1 \\ y_3 & 0 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|ccc|}\hline & y_2 & s_2 & s_3 \\ \hline y_1 & -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ s_1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ y_3 & 0 & 3 & 1 \\ \hline 1 & -\frac{7}{2} & \frac{37}{2} & \frac{11}{2} \\ \hline \end{array}$$

계속하여서 y_3 과 s_3 을 맞바꾸면

$$\begin{array}{|c|ccc|}\hline & y_2 & s_2 & s_3 \\ \hline y_1 & -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ s_1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ y_3 & 0 & 3 & \boxed{1} \\ \hline 1 & -\frac{7}{2} & \frac{37}{2} & \frac{11}{2} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|ccc|}\hline & y_2 & s_2 & y_3 \\ \hline y_1 & -\frac{3}{2} & -5 & -\frac{7}{2} \\ s_1 & \frac{1}{2} & -3 & -\frac{1}{2} \\ s_3 & 0 & 3 & 1 \\ \hline 1 & -\frac{7}{2} & 2 & -\frac{11}{2} \\ \hline \end{array}$$

이 된다.[7)]

7) 이런 과정을 이용하여서 역행렬을 계산할 수도 있다. 이 과정을 이용하여서 행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

의 역행렬을 구해보기 바란다. 다음과 같이 만들면 되는데... 왜일까?

Pivot 을 중심으로하여 독립변수와 종속변수를 맞바꿀 때 표가 변하는 규칙을 다음과 같이 기억하면 편리하다:

$$
\begin{array}{|ccc|}
\hline
\boxed{p} & \cdots & r \\
\vdots & & \vdots \\
c & \cdots & q \\
\hline
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{|ccc|}
\hline
\frac{1}{p} & \cdots & \frac{r}{p} \\
\vdots & & \vdots \\
-\frac{c}{p} & \cdots & q - \frac{rc}{p} \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|c|cc|}
\hline
 & s_1 & s_2 \\
\hline
y_1 & 1 & 3 \\
y_2 & 1 & 4 \\
\hline
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{|c|cc|}
\hline
 & y_1 & y_2 \\
\hline
s_1 & & \\
s_2 & & \\
\hline
\end{array}
$$

8.2 일차관계식 $A\mathbf{x} = \mathbf{r}$.

다음과 같은 일차관계식

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & r_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & r_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & r_m \end{array}$$

을 다음과 같은 $m \times n$ 행렬

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

을 이용하여 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{r},$$

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}.$$

보기 8.5. 일차관계식

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + x_2 + 5x_3 & = & r_1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = & r_2 \\ 3x_2 + x_3 & = & r_3 \end{array}$$

을 행렬

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}.$$

앞의 관계식에서 상수항이 추가된 일차관계식

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + \beta_1 &= r_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + \beta_2 &= r_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + \beta_m &= r_m \end{aligned}$$

을 다음과 같은 $m \times (n+1)$ 행렬

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \beta_m \end{bmatrix}$$

을 이용하여 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$\tilde{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}.$$

보기 8.6. 일차관계식

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 7 &= r_1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 8 &= r_2 \\ 3x_2 + x_3 + 9 &= r_3 \end{aligned}$$

을 행렬

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}.$$

여기에서 잠시 앞 절과 비교해 보면, 상수항이 있는 일차관계식을 나타낼 때, 앞 절에서는 행렬의 행이 더해진 반면에 여기에서는 행렬의 열이 더해지는 것을 알 수 있다. 앞절의 보기들과 여기에서의 보기들을 살펴 보면

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & \vdots & 7 \\ 2 & -3 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 3 & 1 & \vdots & 9 \end{bmatrix}$$

앞 절에서 살펴본 것은, 일차관계식에서 독립변수와 종속변수를 맞바꿀 때, 그 일차관계식을 나타내는 행렬이 바뀌는 규칙이었다.

보기 8.7. 일차관계식

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 7 &= r_1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 8 &= r_2 \\ 3x_2 + x_3 + 9 &= r_3 \end{aligned}$$

에서 x_1 와 r_2 을 맞바꾸어서 일차관계식을 나타내어 보자.

둘째식에서

$$x_1 = \frac{1}{2}r_2 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - 4$$

을 얻고, 이것을 첫째 식에 대입하여 정리하면

$$\frac{3}{2}r_2 + \frac{11}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_3 - 5 = r_1$$

을 얻는다. 이제 우변이 위로 부터 r_1, x_1, r_3 의 순서로 오도록 식을 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}r_2 + \frac{11}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_3 - 5 &= r_1 \\ \frac{1}{2}r_2 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - 4 &= x_1 \\ 3x_2 + x_3 + 9 &= r_3 \end{aligned}$$

을 얻는다.

다시 말하면, 일차관계식

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & \vdots & 7 \\ 2 & -3 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 3 & 1 & \vdots & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

에서 x_1 와 r_2 을 맞바꾸면, 일차관계식

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & \frac{7}{2} & \vdots & -5 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \vdots & -4 \\ 0 & 3 & 1 & \vdots & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ x_1 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

식이 된다는 것이다.

이 보기의 마지막에 있는 행렬과 앞절의 보기 8.3의 마지막에 있는 행렬

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{7}{2} & \frac{37}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

과 비교를 해보면, 이 행렬의 위쪽 3×3 행렬

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

과 위의 보기의 행렬의 왼쪽 3×3 행렬

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

이 같지 않은데, 이는 일차관계식에서 독립변수와 종속변수를 맞바꿀 때 관계식을 나타내는 행렬이 바뀌는 규칙이, 관계식을 $\mathbf{y}^T A = \mathbf{s}^T$ 와 같이 쓸 때와 $A\mathbf{x} = \mathbf{r}$ 와 같이 쓸 때가 다르다는 것이겠다.

보기 8.8. 일차관계식

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 7 &= -u_1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 8 &= -u_2 \\ 3x_2 + x_3 + 9 &= -u_3 \end{aligned}$$

에서 x_1 와 u_2 을 맞바꾸어서 일차관계식을 나타내어 보자. 이 관계식을 앞의 보기의 관계식과 비교하여 보면 우변의 부호 만이 바뀌어 있다. 다시 말하면 종속변수를 r_i 가 아니라 $u_i = -r_i$ 로 생각한다는 것이다.

둘째식에서

$$x_1 = -\frac{1}{2}u_2 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - 4$$

을 얻고, 이것을 첫째 식에 대입하여 정리하면

$$-\frac{3}{2}u_2 + \frac{11}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_3 - 5 = -u_1$$

을 얻는다. 이제 좌변이 위로 부터 $-u_1, -x_1, -u_3$ 의 순서로 오도록 식을 정리하면

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}u_2 + \frac{11}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_3 - 5 &= -u_1 \\ \frac{1}{2}u_2 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + 4 &= -x_1 \\ 3x_2 + x_3 + 9 &= -u_3 \end{aligned}$$

을 얻는다.

이 보기에서 처음에 주어진 일차관계식을 표로 다음과 같이 나타내어 보자.

	x_1	x_2	x_3	1
$-u_1$	3	1	5	7
$-u_2$	2	−3	1	8
$-u_3$	0	3	1	9

이 표를 읽는 방법은, 행을 기준으로 하여서 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
-u_1 &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \\
&= 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 7, \\
-u_2 &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 8 \end{bmatrix} \\
&= 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 8, \\
-u_3 &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \\
&= 3x_2 + x_3 + 9
\end{aligned}
$$

이제 이 보기의 풀이를 표로 쓴다면 다음과 같겠다.

	x_1	x_2	x_3	1
$-u_1$	3	1	5	7
$-u_2$	$\boxed{2}$	-3	1	8
$-u_3$	0	3	1	9

$\Rightarrow$

	u_2	x_2	x_3	1
$-u_1$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{7}{2}$	-5
$-x_1$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	4
$-u_3$	0	3	1	9

다음 표는 앞절의 보기 8.3에 있는 표인데

	y_2	s_2	s_3
y_1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{7}{2}$
s_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_3	0	3	1
1	$-\frac{7}{2}$	$\frac{37}{2}$	$\frac{11}{2}$

이 표와 앞의 보기의 오른쪽 표를 비교해 보면

$$\mathbf{y}^T A = \mathbf{s}^T$$

꼴의 일차관계식과

$$A\mathbf{x} = -\mathbf{r}$$

꼴의 일차관계식에서는 독립변수와 종속변수를 맞바꿀 때, 계수들이 변하는 방식이 일치함을 알 수 있다. 다시 말하면 pivot 규칙

$$
\begin{array}{|ccc|}
\hline
\boxed{p} & \cdots & r \\
\vdots & & \vdots \\
c & \cdots & q \\
\hline
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{|ccc|}
\hline
\frac{1}{p} & \cdots & \frac{r}{p} \\
\vdots & & \vdots \\
-\frac{c}{p} & \cdots & q - \frac{rc}{p} \\
\hline
\end{array}
$$

이 여전히 적용된다는 것이다. 물론,

$$A\mathbf{x} = -\mathbf{r}$$

꼴의 연립방정식에서 독립변수와 종속변수를 맞바꿀 때, 계수들이 변하는 방식을 알기 위해서는 앞 절에서와 같이 일반적인 식을 사용하여 계산을 하여야 하는 것이지만, 이 정도의 설명으로도 괜찮기를 바란다.

보기 8.9. 앞의 보기의 과정을 표로 나타내면 다음과 같았다:

	x_1	x_2	x_3	1
$-u_1$	3	1	5	7
$-u_2$	$\boxed{2}$	-3	1	8
$-u_3$	0	3	1	9

$\Rightarrow$

	u_2	x_2	x_3	1
$-u_1$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{7}{2}$	-5
$-x_1$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	4
$-u_3$	0	3	1	9

계속하여서 u_3 과 x_3 을 맞바꾸면

	u_2	x_2	x_3	1
$-u_1$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{7}{2}$	-5
$-x_1$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	4
$-u_3$	0	3	$\boxed{1}$	9

$\Rightarrow$

	u_2	x_2	u_3	1
$-u_1$	$-\frac{3}{2}$	-5	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{73}{2}$
$-x_1$	$\frac{1}{2}$	-3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$-x_3$	0	3	1	9

이 된다.

8.3 또하나의 트릭

관계식 $A\mathbf{x} = \mathbf{r}$ 에서 종속변수와 독립변수를 바꿀 때, 행렬 A 가 변하는 방식이 관계식 $\mathbf{y}^T A = \mathbf{s}^T$ 에서의 경우와 다르기 때문에 굳이 관계식을 $A\mathbf{x} = -\mathbf{r}$ 와 같은 꼴로 써서 계산하였더니 다행하게도 행렬 A 가 변하는 방식이 관계식 $\mathbf{y}^T A = \mathbf{s}^T$ 에서의 경우와 같아졌다. 관계식 $A\mathbf{x} = \mathbf{r}$ 에 대해서도 나름의 규칙이 있을 터인데 이 규칙은 찾아보지 않고 왜 이렇게까지 복잡하게 생각하는가? 라는 의문이 있을 수 있을 것이라고 생각하는데, 이렇게 하는 까닭 중에 하나는 주어진 문제와 그의 쌍대문제를 한꺼번에 다루려는 때문이라고 할 수 있다.

이제 그러면 보기 8.8 에서의 일차관계식을 다시 다음과 같은 표로 나타내어 보자.

	x_1	x_2	x_3	-1
$-u_1$	3	1	5	-7
$-u_2$	2	-3	1	-8
$-u_3$	0	3	1	-9

이 표를 읽는 방법은, 행을 기준으로 하여서 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
-u_1 &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & -7 \end{bmatrix} \\
&= 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 7, \\
-u_2 &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -8 \end{bmatrix} \\
&= 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 8, \\
-u_3 &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & -9 \end{bmatrix} \\
&= 3x_2 + x_3 + 9
\end{aligned}$$

그러면 새로운 표를 이용한 보기 8.8 의 풀이는 다음과 같겠다:

	x_1	x_2	x_3	-1
$-u_1$	3	1	5	-7
$-u_2$	$\boxed{2}$	-3	1	-8
$-u_3$	0	3	1	-9

$\Rightarrow$

	u_2	x_2	x_3	-1
$-u_1$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{7}{2}$	5
$-x_1$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-4
$-u_3$	0	3	$\boxed{1}$	-9

$\Rightarrow$

	u_2	x_2	u_3	-1
$-u_1$	$-\frac{3}{2}$	-5	$-\frac{7}{2}$	$\frac{73}{2}$
$-x_1$	$\frac{1}{2}$	-3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-x_3$	0	3	1	-9

앞의 보기 8.8 의 풀이에서의 표와 새로운 표를 비교하면, 왼쪽 위 귀퉁이의 수가 1 에서 -1 로 바뀌었고, 그래서 맨 왼쪽 열에 있는 수 들의 부호가 바뀌었는데, pivot 규칙은 바뀌지 않음을 다시 한번 확인하기 바란다. 우리는 새로운 표를 이용하여서 최대값 문제를 풀 예정인데, 이렇게까지 복잡한 과정을 거치는 까닭은 쌍대문제를 한꺼번에 풀려는 욕심 때문 임을 다시 한 번 강조한다.

연습문제

1. 변수 y_1, y_2 와 변수 s_1, s_2 가 다음 관계를 만족한다.

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \end{bmatrix}.$$

동치인 관계식이 되도록 행렬을 완성하여라.

a) $\begin{bmatrix} y_1 & s_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 & s_2 \end{bmatrix}.$

b) $\begin{bmatrix} s_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & y_1 \end{bmatrix}.$

c) $\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}.$

2. 변수 x_1, x_2 와 변수 r_1, r_2 가 다음 관계를 만족한다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}.$$

동치인 관계식이 되도록 행렬을 완성하여라.

a) $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_2 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ x_1 \end{bmatrix}.$

b) $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ r_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ r_2 \end{bmatrix}.$

c) $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$

3. 변수 x_1, x_2 와 변수 r_1, r_2 가 다음 관계를 만족한다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}.$$

동치인 관계식이 되도록 행렬을 완성하여라.

a) $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_2 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_1 \\ x_1 \end{bmatrix}.$

b) $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ r_1 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_2 \\ r_2 \end{bmatrix}.$

c) $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$

4. 변수 y_1, y_2 와 변수 s_1, s_2 가 다음 표와 같은 관계를 만족한다.

	s_1	s_2
y_1	3	4
y_2	5	6
1	7	8

동치인 관계를 이루도록 다음 표를 완성하여라.

	y_2	s_2
y_1		
s_1		
1		

	s_1	y_1
s_2		
y_2		
1		

	y_1	y_2
s_1		
s_2		
1		

5. 변수 x_1, x_2 와 변수 r_1, r_2 가 다음 표와 같은 관계를 만족한다.

	x_1	x_2	-1
$-r_1$	3	4	5
$-r_2$	6	7	8

동치인 관계가 되도록 다음 표를 완성하여라.

	r_2	x_2	-1
$-r_1$			
$-x_1$			

	x_1	r_1	-1
$-x_2$			
$-r_2$			

	r_1	r_2	-1
$-x_1$			
$-x_2$			

제 9 장

최소값 문제와 심플렉스 표

연립일차관계식에서 독립변수와 종속변수를 맞바꿀 때, 연립일차관계식을 나타내는 형렬들이 어떠한 규칙을 따라서 변하는지를 우리는 알고 있고, 표를 이용하면 이 규칙을 이해하기에 편함을 안다. 이 단원에서는 이 표를 이용하여 선형계획법에서의 최소값 문제를 해결하는 방법을 설명한다.

9.1 심플렉스 방법의 아이디어

심플렉스 방법은 다음과 같은 아이디어 들로 이루어져 있다.

- 슬랙변수를 도입한다.
- 자유변수를 결정하면 꼭지점이 결정된다. 자유변수가 결정되면 기저변수라고 불리우는 나머지 변수 들의 값도 결정된다. 이를 이용하여 이 꼭지점이 진짜 꼭지점인지를 판단할 수 있다.
- 목적함수를 자유변수로 나타낸다. 그러면 현재의 꼭지점에서의 목적함수의 값이 최소값인지 아닌지를 알 수 있고, 그 꼭지점에서 최소값이 아니면, 목적 함수 값이 더 작아지도록 꼭지점을 바꾸어 가는 방법도 알 수 있다.

앞에서는 행렬을 이용하여서, 이 아이디어 들을 사용하였는데, 여기에서는 표를 이용하는 방법을 살펴 본다.

9.2 심플렉스 표

제약조건이

$$y_1,\ y_2 \geq 0, \quad y_1 + 2y_2 \geq 4, \quad 2y_1 + y_2 \geq 5$$

일 때, 목적함수

$$y_1 + y_2$$

의 최소값을 구하는 문제를 표로 나타내고 이 표를 사용하는 방법을 설명하겠다.

제약조건

$$y_1 + 2y_2 \geq 4, \quad 2y_1 + y_2 \geq 5$$

에 대하여 슬랙변수 $s_1,\ s_2$ 를 다음과 같이 정의하고

$$\begin{aligned} s_1 &:= y_1 + 2y_2 - 4 \\ s_2 &:= 2y_1 + y_2 - 5 \end{aligned}$$

다음과 같이 표를 만든다 :

	s_1	s_2
y_1	1	2
y_2	2	1
1	-4	-5

이 표를 읽는 방법은 다음과 같다:

- 맨 왼쪽의 열벡터 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 와 그 다음 열벡터 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ 와의 내적이, 표의 위에 있는 변수 s_1 이고

$$s_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = y_1 + 2y_2 - 4$$

- 맨 왼쪽의 열벡터 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 와 또 그 다음 열벡터 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ 와의 내적이 표의 위에 있는 변수 s_2 이다.

$$s_2 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = 2y_1 + y_2 - 5.$$

이제 최소값을 구하려는 일차함수 $y_1 + y_2$ 를 앞에서 만든 표에 등장시키기 위해 앞의 표를 늘여서 다음과 같은 표를 만든다 :[1)]

	s_1	s_2	
y_1	1	2	1
y_2	2	1	1
1	-4	-5	0

여기에서 왼쪽의 열벡터 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 과 오른쪽에 덧붙여진 열벡터 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 과의 내적이 목적함수 $y_2 + y_2$ 를 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = y_1 + y_2.$$

1) 여기에서 맨 마지막 열(즉, 목적함수를 나타내는 열)은 방정식을 나타내는 것이 아니므로 위와 같은 pivot rule 을 적용하는 것은 이상하다고 생각할 수도 있다. 그렇다면

	s_1	s_2	v
y_1	1	2	1
y_2	2	1	1
1	-4	-5	0

와 같이 새로운 변수 v 를 써넣고 맨 마지막 열은 방정식

$$v = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = y_1 + y_2$$

을 나타낸다고 생각하면 될 것이다.

최종적인 이 표를 주어진 최소값 문제에 대한 심플렉스 표라고 부른다. 그러면

> 심플렉스 표에서 맨 왼쪽 열에 쓰여있는 변수 들이 자유변수이고, 맨 위의 행에 쓰여있는 변수 들이 기저변수이다.

그래서 왼쪽의 변수를 0 으로 놓으면 진짜이건 가짜이건 꼭지점을 얻는다. 이 꼭지점이 진짜인지 가짜인지는 위에 있는 기저변수의 값을 보면 알 수 있는데, 다음을 알 수 있다:

> 이 기저변수의 값은 맨 아래 행에 있는 값이다.

현재의 표에서, 자유변수 y_1, y_2 가 결정하는 꼭지점에서의 기저변수 s_1, s_2 의 값은 무엇인가 하면, 현재의 꼭지점에서는 $y_1 = y_2 = 0$ 이므로

$$s_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = -4, \quad s_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = -5$$

로서, 표의 맨 아래 행에 있는 값 들이다. 이 보기에서 $y_1 = y_2 = 0$ 인 꼭지점은 진짜꼭지점이 아니다.

또한, 다음을 알 수 있다:

> 표의 맨 오른쪽 맨아래에 쓰여있는 값이 현재의 꼭지점에서의 목적함수의 값이다.

현재의 표에서 보면, 꼭지점 $y_1 = y_2 = 0$ 에서의 목적함수 $y_1 + y_2$ 의 값은

$$y_1 + y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

으로서 표의 맨 오른쪽 맨 아래에 있는 값 0 이 된다.[2)]

이제 심플렉스 표에서 변수 y_2 와 s_1 을 맞바꾸어 보자.[3)] 그러면 표는 다음과 같이 바뀌게 된다:

2) 가짜꼭지점에서의 목적함수 값을 계산하는 것은 무의미하지만...
3) 다시 말하면, s_1 이 자유변수가 되고, y_2 는 기저변수가 되면.

$$
\begin{array}{|c|cc|c|}
\hline
 & s_1 & s_2 & \\
\hline
y_1 & 1 & 2 & 1 \\
y_2 & \boxed{2} & 1 & 1 \\
\hline
1 & -4 & -5 & 0 \\
\hline
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{|c|cc|c|}
\hline
 & y_2 & s_2 & \\
\hline
y_1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\
s_1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\hline
1 & 2 & -3 & 2 \\
\hline
\end{array}
$$

바뀐 오른쪽 표가 알려주는 것은 다음과 같다:

- 자유변수는 y_1, s_1 이다.
- 위에 있는 기저변수는 다음과 같이 나타내어 진다.

$$
\begin{aligned}
y_2 &= \begin{bmatrix} y_1 \\ s_1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}s_1 + 2, \\
s_2 &= \begin{bmatrix} y_1 \\ s_1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}y_1 + \frac{1}{2}s_1 - 3.
\end{aligned}
$$

- 목적함수는 다음과 같이 나타내어 진다.

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ s_1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}s_1 + 2.
$$

그래서

- $y_1 = s_1 = 0$ 인 꼭지점에서는 위에 쓰여 있는 기저변수의 값이

$$
y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix} = 2, \quad s_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -3 \end{bmatrix} = -3
$$

  으로서 다시 표의 아래의 값들과 같아진다. 이 꼭지점은 진짜꼭지점이 아니다.

- 그 꼭지점에서의 목적함수의 값은

$$
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix} = 2
$$

으로서 표의 오른쪽 맨아래 모퉁이의 값과 같아진다.[4)]

이제, 앞의 맨 마지막 표에서 변수 y_1 과 s_2 를 바꾸면 표는 다시 다음과 같이 바뀐다:

$$\begin{array}{|c|cc|c|}\hline & y_2 & s_2 & \\ \hline y_1 & -\frac{1}{2} & \boxed{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} \\ s_1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & 2 & -3 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{|c|cc|c|}\hline & y_2 & y_1 & \\ \hline s_2 & & & \frac{1}{3} \\ s_1 & & & \frac{1}{3} \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

이 표에서 자유변수는 s_1, s_2 인데, 꼭지점 $s_1 = s_2 = 0$ 에서 기저변수 y_1, y_2 의 값은 아래에 있는 값으로서

$$y_2 = 1, \quad y_1 = 2$$

이므로, 꼭지점 $s_1 = s_2 = 0$ 는 진짜꼭지점임을 안다. 뿐만 아니라 목적함수는

$$\begin{bmatrix} s_2 \\ s_1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2 + 3$$

와 같이 표시되는데, s_1, s_2 의 계수 들이 모두 양수이므로, 이 꼭지점에서의 목적함수 값이 최소값임을 알고, 그 값은

$$\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + 3 = 3$$

으로서, 표의 맨 오른쪽 아래 귀퉁이에 있는 3 이다. 이로서 최소값을 구하였다.

오른쪽 표는 맨 아래의 행벡터와 맨 오른쪽의 열벡터가 모두 음이 아닌 수로 이루어져 있는데,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \geq 0$$

이런 꼴의 심플렉스 표는 다음과 같이 매우 중요한 성질을 갖고 있다.

1. 맨 아래의 행벡터가 모두 음이 아닌 수로 이루어져 있으면 이 꼭지점에서의 모든 변수의 값은

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & s_1 & s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

4) 다시 한번, 가짜꼭지점에서의 목적함수 값을 계산하는 것은 무의미하지만...

이므로 이 꼭지점은 제약조건을 모두 만족시키는 진짜 꼭지점이다.[5)]

2. 맨 오른쪽의 열벡터가 모두 음이 아닌 수로 이루어져 있으면 이 꼭지점에서의 목적함수의 값은

$$v = \begin{bmatrix} s_2 \\ s_1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 3 \end{bmatrix} = 3$$

인데 예를 들어서, 다른 진짜 꼭지점 $s_2 = a, s_1 = b$ 이 있다면[6)] 이 진짜 꼭지점에서의 목적함수의 값은

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{a}{3} + \frac{b}{3} + 3$$

일 것이다. 그런데 이 꼭지점이 진짜 꼭지점이기 위해서는

$$s_2 = a \geq 0, \quad s_1 = b \geq 0$$

이어야 할 것이고 그렇다면

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + 3 \geq \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + 3 = 3$$

이다. 즉, 꼭지점 $s_2 = s_1 = 0$ 에서의 목적함수의 값이 다른 어떠한 진짜 꼭지점에서의 목적함수의 값보다도 클 수가 없다.

이제까지 이 단원에서 설명한, 심플렉스 표를 이용하여 최소값 문제를 푸는 방법을 다음과 같이 정리할 수 있겠다:

---

5) 그러니까, 심플레스 표에서 [아래] ≥ 0 이면 $\begin{bmatrix} \text{왼} \\ \text{쪽} \end{bmatrix} = 0$ 으로 표시되는 꼭지점은 진짜 꼭지점이라는 것이다.

6) 꼭지점에서는 모든 변수의 값이 정해진다.

1. 슬랙변수를 도입한다.
2. 목적함수까지를 포함한 심플렉스 표를 만든다.
3. 적절히 pivot 을 하여, 주어진 표를 다음과 같은 꼴로 바꾼다.

		≥ 0
1	≥ 0	♠

4. 이와 같은 꼴이 되도록 바꿀 수 있다면, 진짜 꼭지점

$$\begin{bmatrix}\text{왼}\\ \text{쪽}\end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix}\ \text{위}\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\ \text{아래}\ \end{bmatrix}$$

에서의 목적함수의 값인 ♠ 가 구하고자 하는 최소값이다.

연습문제

1. 다음 최소값 문제의 표를 만들어라.

   a) 목적함수는 $3y_1 + 4y_2$ 이고 제약조건은

   $$y_1 + 2y_2 \geq 4, \quad y_1 + y_2 \geq 3, \quad y_1, y_2 \geq 0.$$

   b) 목적함수는 $y_1 - y_2 + y_3$ 이고 제약조건은

   $$y_1 + y_2 \geq 1, \quad y_2 + y_3 \leq 1, \quad y_3 + y_1 \leq 2, \quad , y_1, y_2, y_3 \geq 0.$$

   c) 목적함수는 $5y_1 + 6y_2 + 7y_3$ 이고 제약조건은

   $$y_1, y_2, y_3 \geq 0, \quad 3y_1 + y_3 \geq 10, \quad y_2 + y_3 \leq 12.$$

2. 왼쪽의 표에서 주어진 원소를 중심으로 pivot 하여서 오른쪽 표를 완성하여라.

	s_1	s_2	
y_1	1	$\boxed{2}$	1
y_2	2	1	1
1	-4	-5	0

$\Rightarrow$

제 10 장

심플렉스 표를 이용한 최소값 계산

적절하게 pivot 을 해서 심플렉스 표를 다음과 같은 꼴로 바꿀 수 있다면

		≥ 0
1	≥ 0	♠

주어진 최소값 문제를 풀 수 있으며 그 최소값은 ♠ 가 됨을 알고 있다. 이 단원에서는 주어진 최소값 문제의 표를 위와 같은 꼴로 바꾸는 방법에 대해서 알아본다.

앞으로 주어진 표의 행벡터와 열벡터의 순서를 알아볼 때, 다음과 같은 순서를 따라서 읽기로 하자.

위, 첫째행, 둘째행, . . . , 아래
왼, 첫째열, 둘째열, . . . , 오른

예를 들어서, 다음 표에서

	◇ ◇ ◇	
*		♣
*		♣
*		♣
	♡ ♡ ♡	♠

"위"는 $\diamond$ 로 이루어진 행이고, "아래"는 $\heartsuit$ 로 이루어진 행이며, "왼"은 $*$ 로 이루어진 열이고, "오른"은 $\clubsuit$ 로 이루어진 열이다.

	위	
왼		오른
	아래	

이제 심플렉스 표를 바꾸는 방법에 대해 알아볼 터인데, 먼저 진짜 꼭지점을 찾았을 때에는 어떻게하면 좋을지 알아 보자.

10.1 아래 ≥ 0 일 때=진짜꼭지점에서

진짜 꼭지점은 심플렉스 표에서

$$\text{아래} \geq 0$$

인 경우에 해당한다. 이 꼭지점은 "왼"에 있는 변수들이 0 인 점이다. 이처럼 표에서 아래 ≥ 0 일 때, 해야 할 일은

$$\text{오른} \geq 0$$

이도록 만드는 것이다.

그러면 이제 먼저 "오른"의 성분들의 부호를 조사한다. 그러면 다음 두 가지 경우가 있을 수 있다.

- 그 성분의 부호들이 모두 ≥ 0 인 경우
- 그 성분들 중에서 < 0 인 성분이 있는 경우

첫번째의 경우는, 목적함수의 자유변수에 대한 계수 들이 모두 ≥ 0 라는 것으로서, 이 꼭지점에서의 목적함수의 값이 최소값이고 그 최소값은 오른쪽 맨 아래 귀퉁이에 쓰여 있는 값이라는 것을 안다.

그러므로 두번째의 경우, 즉 < 0 인 성분이 있는 경우에 어떻게 해야 할지만 설명하면 되겠다.

이제 "오른"의 i_0 번째 성분인 b_{i_0} 가[1] 음의 값을 갖는다고 하자. 그러면 그 원소를 포함하는 행벡터, 그러니까 i_0 번째 행벡터의 성분 중에서 음수인 성분을 찾는다. 이때 또 다음과 같은 두 가지 경우가 있을 수 있다.

- < 0 인 성분이 있는 경우
- < 0 인 성분이 없는 경우

1) 그러니까 b_{i_0} 는 표에서 i_0 번째 행의 맨 마지막 성분이다.

10.1.1 아래≥ 0 인데 ″오른″에서 < 0 인 행에 < 0 인 성분이 있는 경우

이제 아래≥ 0 인데 ″오른″에서 < 0 인 행에 < 0 인 성분이 있는 경우에 표를 바꾸어 나가는 방법에 대해 알아보자.

< 0 인 성분이 있는 경우에, 만일 한개만 있으면 그 성분을 중심으로 pivot 하고, 그런 성분이 여러개($a_{i_0,j}$ 로 표시하였다)이면 다음 값

$$\left|\frac{c_j}{a_{i_0j}}\right|$$

가 가장 작아지는 성분을 중심으로 pivot 한다. 여기에서 c_j 는 a_{i_0j} 가 있는 열벡터의 맨 아래에 있는 "아래″의 원소이다. 만일 그러한 성분이 또 여러개이면 그 중 아무거나를 중심으로 pivot 하면 된다.

$$\begin{array}{ccc|c}
 & \vdots & & \\
\cdots & a_{i_0,j} < 0 & \cdots & b_{i_0} < 0 \\
 & \vdots & & \\
\hline
 & c_j > 0 & &
\end{array}$$

보기 10.1. *1.* 다음 표에서 오른쪽 열의 첫번째 원소가 음수이다. 그러므로 첫번째 행의 원소 중에서 음수인 성분을 찾는다. 그랬더니 첫번째 행에서 음수인 원소는 -2 하나 뿐이다. 그러므로 -2 를 중심으로 *pivot* 할 수 있다. 또, 오른쪽 열의 두번째 원소가 음수이다. 그러므로 두번째 행의 원소 중에서 음수인 성분을 찾는다. 그랬더니 두번째 행에서 음수인 원소는 -3 하나 뿐이다. 그러므로 -3 을 중심으로 *pivot* 할 수도 있다.

	1	$\boxed{-2}$	-1
	$\boxed{-3}$	1	-2
1	*2*	*3*	*0*

2. 다음 표에서 오른쪽 열의 첫번째 원소가 음수이다. 그러므로 첫번째 행의 원소 중에서 음수인 성분을 찾는다. 그랬더니 첫번째 원소와 세번째 원소가 음수인데, 첫번째 원소 -2 에 대해서는

$$\left|\frac{c_j}{a_{i_o,j}}\right| = \left|\frac{1}{-2}\right| = \frac{1}{2}$$

이고 세번째 원소 -2 에 대해서는

$$\left|\frac{c_j}{a_{i_0,j}}\right| = \left|\frac{3}{-2}\right| = \frac{3}{2}$$

이므로 첫번째 원소 -2 를 중심으로 *pivot* 한다.

$$\begin{array}{|c|ccc|c|}
\hline
 & & & & \\
\hline
 & \boxed{-2} & 1 & -2 & -1 \\
 & 2 & 3 & 5 & 2 \\
 & -3 & 4 & -1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 & \mathit{0} \\
\hline
\end{array}$$

이렇게 pivot 을 하면 , 처음의 표와 새로 만들어질 표의 관계는 다음과 같아진다:

1. “아래”의 부호는 변함이 없다. 다시 말하면, 처음의 표가 나타내는 꼭지점은 진짜 꼭지점이었는데 새로 만들어진 표가 나타내는 꼭지점도 여전히 진짜 꼭지점을 나타내게 된다는 것이다.

$$\text{아래} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{아래} \geq 0.$$

2. 새로운 꼭지점에서의 목적함수의 값은 더 커지지는 않는다.[2)]

[(1)의 증명] Pivot 의 중심을 $a_{i_0,j}$ 라고 하자.

$$\begin{array}{ccccc|c}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots & \boxed{a_{i_0,j}} & \cdots & a_{i_0,k} & \cdots & b_{i_0} < 0 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hline
\cdots & c_j & \cdots & c_k & \cdots & v
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ccccc|c}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots & \hat{a}_{i_0,j} & \cdots & \hat{a}_{i_0,k} & \cdots & \hat{b}_{i_0} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hline
\cdots & \hat{c}_j & \cdots & \hat{c}_k & \cdots & \hat{v}
\end{array}$$

2) 그러니까 이와 같은 과정은 목적함수의 값이 늘어나지 않도록 진짜 꼭지점을 찾아 나가는 과정이라고 할 수 있다.

이제, pivot 의 아래의 원소는

$$\hat{c}_j = -\frac{c_j}{a_{i_0,j}} = -\frac{\text{양}}{\text{음}} = \text{양}$$

이고 다른 데의 아래의 원소는

$$\hat{c}_k = c_k - \frac{c_j a_{i_0,k}}{a_{i_0,j}}$$

인데

(i) 만일 $a_{i_0,k} \geq 0$ 이면

$$\hat{c}_k = \text{양} - \frac{\text{양} \cdot \text{양}}{\text{음}} = \text{양} + \text{양} \geq 0.$$

(ii) 만일 $a_{i_0,k} \leq 0$ 이면 우선 pivot 의 원소 $a_{i_0,j}$ 를 선택한 방법으로부터

$$\left|\frac{c_j}{a_{i_0,j}}\right| \leq \left|\frac{c_k}{a_{i_0,k}}\right|$$

인데 이로부터

$$-\frac{c_j}{a_{i_0,j}} = \left|\frac{c_j}{a_{i_0,j}}\right| \leq \left|\frac{c_k}{a_{i_0,k}}\right| = -\frac{c_k}{a_{i_0,k}}$$

이고 또 $a_{i_0,k} < 0$ 이므로

$$-\frac{c_j}{a_{i_0,j}} a_{i_0,k} \geq -\frac{c_k}{a_{i_0,k}} a_{i_0,k} = -c_k$$

이고 따라서

$$\hat{c}_k = c_k - c_j \frac{a_{i_0,k}}{a_{i_0,j}} \geq c_k - c_k = 0.$$

이로서 (1)의 증명이 끝난다. ∎

[(2)의 증명] 다음 계산 :

$$\hat{v} = v - \frac{b_{i_0} c_j}{a_{i_0,j}} = v - \frac{\text{음양}}{\text{음}} = v - \text{양} \leq v$$

으로부터 (2)가 증명된다. ∎

보기 10.2.

$$
\begin{array}{|c|ccc|c|}
\hline
 & & & & \\
\hline
 & \boxed{-2} & -1 & -2 & -1 \\
 & 2 & 3 & 5 & 2 \\
 & -3 & 4 & -1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\
\hline
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{|c|ccc|c|}
\hline
 & & & & \\
\hline
 & & & & \frac{1}{2} \\
 & & & & 1 \\
 & & & & \frac{5}{2} \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\
\hline
\end{array}
$$

10.1.2 아래≥ 0 인데 ″오른″에서 < 0 인 행에 < 0 인 성분이 없는 경우

이제 아래≥ 0 인데 ″오른″에서 < 0 인 행에 < 0 인 성분이 없는 경우에 대해 알아보자.

이때는 다음의 표

$$
\begin{array}{|c|ccccc|c|}
\hline
 & & \cdots & \heartsuit & \cdots & & \\
\hline
\vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
\diamondsuit & \clubsuit & \cdots & \clubsuit & \cdots & \clubsuit & b < 0 \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
\hline
1 & & \cdots & c \geq 0 & \cdots & & \spadesuit \\
\hline
\end{array}
$$

에서,

$$\text{이 행에 있는 모든 } \clubsuit \geq 0$$

라는 것이다. 왼쪽에 있는 변수와 위에 있는 변수가 모두 ≥ 0 인 점이, 제약조건을 만족시키는 가능영역의 점임을 기억하자. 이제 이 표에서 다음을 안다:

- 위쪽의 변수 $\heartsuit$ 는

$$
\heartsuit = \begin{bmatrix} \vdots \\ \diamondsuit \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \clubsuit \\ \vdots \\ c \end{bmatrix}
$$

  이고

- 목적함수는

$$\text{목적함수} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \diamondsuit \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ b \\ \vdots \\ \spadesuit \end{bmatrix}$$

  이다.

이제 왼쪽 변수 중에서 나머지 변수는 모두 0 이고 $\diamondsuit$ 만 양수인 점을 생각해 보자. 그러면 가정으로부터 $\clubsuit \geq 0,\ c \geq 0$ 이므로 위쪽 변수 $\heartsuit$ 의 값은

$$\heartsuit = \begin{bmatrix} 0 \\ \diamondsuit \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \clubsuit \\ \vdots \\ c \end{bmatrix} = \diamondsuit \clubsuit + c \geq c \geq 0$$

이다. 즉, 왼쪽 변수 중에서 나머지 변수는 모두 0 이고 $\diamondsuit$ 만 양수인 점은 제약조건을 만족시키는 점이다. 그런데 이 점에서의 목적함수의 값은

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \diamondsuit \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ b \\ \vdots \\ \spadesuit \end{bmatrix} = b \diamondsuit + \spadesuit$$

이다. 이제 양수인 $\diamondsuit$ 값을 계속 크게하면, 가정으로부터 $b < 0$ 이므로 목적함수의 값인

$$b \diamondsuit + \spadesuit$$

의 값은 음수로서 그 절대값이 계속 커지게 된다. 그러므로 이러한 문제의 최소값은 $-\infty$ 가 됨을 알 수 있다. ■

지금까지 진짜 꼭지점을 찾았을 때, 즉 심플렉스 표에서

$$\text{아래} \geq 0$$

인 경우에는 어떻게 심플렉스 표를 바꾸어 나가야 하는지를 설명하였다. 그러므로 이제 남은 경우는 "아래"의 성분 중에서 음의 값을 갖는 성분이 있는 경우이다.

10.2 "아래"에 < 0 인 성분이 있을 경우=진짜꼭지점 찾기

"아래"에 < 0 인 성분이 없을 경우에는 표를 어떻게 바꾸어 나가면 되는지를 알았다. 그러면 이제 "아래"에 < 0 인 성분이 있을 경우에는 어떻게 해야 하는지를 알아 보겠다. 표의 "아래"에 < 0 인 성분이 있을 경우는, 이 표가 현재 진짜꼭지점을 나타내고 있지 못한데, 그러므로 표를 바꾸어서 "아래"에 < 0 인 성분이 없도록 하는 과정은 진짜꼭지점을 찾아가는 과정이겠다.

"아래"의 성분 중에서 음의 값을 갖는 성분이 있으면, 이러한 성분 중에서 처음 등장하는 성분을 택한다. 그 성분을 c_k 라고 하고[3] 이것을 포함하는 열벡터의 성분을 살펴 본다. 그러면 다음 두 가지 경우가 있을 수 있다:

- 성분이 모두 ≤ 0 일 경우
- 성분 중에 양의 값을 갖는 성분이 있을 경우

10.2.1 "아래"에서 < 0 인 열의 모든 성분이 모두 ≤ 0 일 경우

"아래"에서 < 0 인 열의 모든 성분이 모두 ≤ 0 일 경우 의 표는 다음과 같을 것이다.

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & & \clubsuit & \\
\hline
\geq 0 & \cdots & \leq 0 & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \\
\geq 0 & \cdots & \leq 0 & \cdots \\
\hline
1 & \cdots & c_k < 0 & \cdots
\end{array}
$$

제약조건을 만족시키는 점들은 이 표에서 맨 아래의 1 을 제외한 왼쪽 열의 성분들이 모두 ≥ 0 이어야 한다. 또한 위의 변수 $\clubsuit$ 가 나타내는 점이 제약조건을 만족시키는 점이기 위해서는 역시 $\clubsuit \geq 0$ 이어야 한다. 그런데 이 표를 이용하여 $\clubsuit$ 의 값을

3) 그러니까 $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1} \geq 0$ 이라는 것이다.

계산하면

$$\clubsuit = \begin{bmatrix} \geq 0 \\ \vdots \\ \geq 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \leq 0 \\ \vdots \\ \leq 0 \\ c_k \end{bmatrix} = \text{음} + c_k \leq c_k < 0$$

이므로 모순이다. 즉, 이런 경우에는 제약조건을 만족시키는 점의 집합이 공집합이다.

10.2.2 ″아래″에서 < 0 인 열의 성분 중에 > 0 인 성분이 있을 경우

이제 ″아래″에서 < 0 인 열의 성분 중에 > 0 인 성분이 있을 경우에 대해 알아 보자.

″아래″에서 < 0 인 열의 성분 중에 > 0 인 성분을 $a_{i_0,k}$ 라고 하자.

$$\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ & a_{i_0,k} > 0 & \\ & \vdots & \\ \hline \cdots & c_k < 0 & \cdots \end{array}$$

이제, $c_j \geq 0$ 인 열벡터의 i_0 번째 성분 중에서 음인 것이 없으면 $a_{i_0,k}$ 를 pivot 으로 택하고, 음인 것이 있으면(이것을 $a_{i_0,j}$ 라고 하겠다) 다음 값들

$$\left|\frac{c_k}{a_{i_0,k}}\right|, \quad \left|\frac{c_j}{a_{i_0,j}}\right|$$

을 모두 비교하여 가장 작은 값이 되도록 하는 $a_{i_0,l}$ 을 택한다. 그리고 이 $a_{i_0,l}$ 을 중심으로 pivot 한다.[4)]

$$\begin{array}{ccccc} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{i_0,j} < 0 & \cdots & a_{i_0,k} > 0 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \hline \cdots & c_j \geq 0 & \cdots & c_k < 0 & \cdots \end{array}$$

보기 10.3. 아래의 표에서 $\left|\frac{2}{-1}\right| \geq \left|\frac{-3}{2}\right|$ 이다. 그러므로 2 를 기준으로 *pivot* 한다.

4) 그러므로 pivot 원소는 i_0 번째 행에 있게 된다.

$$\begin{array}{|c|ccc|c|}
\hline
 & & & & \\
\hline
 & 0 & -1 & \boxed{2} & \\
 & 1 & -2 & -1 & \\
 & 1 & 2 & -1 & \\
\hline
 & 1 & 2 & -3 & \\
\hline
\end{array}$$

이렇게 하면 새로운 표는 다음과 같아진다:

1. 음이 아니었던 “아래”의 성분은 여전히 음이 아니다.
2. 처음에 음의 값을 가졌던 그 c_k 의 값은 더 작아지지는 않는다. [5)]

[(1)의 증명] 다음의 두 가지 경우가 있을 수 있다:

- pivot 이 $a_{i_0,k}$ 인 경우
- pivot 이 $a_{i_0,k}$ 이 아닌 경우

먼저 pivot 이 $a_{i_0,k}$ 인 경우를 살펴보겠다. 이때는

$$a_{i_0,k} > 0, \quad c_k < 0$$

인데, c_j 를 처음부터 음이 아니었던 “아래”의 성분이라고 하면 $j \neq k$ 이고

$$\hat{c}_j = c_j - \frac{a_{i_0,j} c_k}{a_{i_0,k}}$$

이다.

(i) 만일 $a_{i_0,j} \geq 0$ 이면

$$\hat{c}_j = c_j - \frac{a_{i_0,j} c_k}{a_{i_0,k}} = c_j - \frac{\text{양음}}{\text{양}} \geq c_j \geq 0.$$

(ii) 만일 $a_{i_0,j} \leq 0$ 이면

$$-\frac{c_k}{a_{i_0,k}} = \left|\frac{c_k}{a_{i_0,k}}\right| \leq \left|\frac{c_j}{a_{i_0,j}}\right| = -\frac{c_j}{a_{i_0,j}}$$

5) 그러므로 이 과정을 계속하면 여기의 성분이 ≥ 0 이기를 기대할 수 있겠다.

인데, $a_{i_0,j} \le 0$ 이므로

$$-\frac{a_{i_o,j}c_k}{a_{i_0,k}} \ge -\frac{c_j}{a_{i_0,j}} a_{i_o,j} = -c_j$$

이고 따라서

$$\hat{c}_j = c_j - \frac{a_{i_0,j}c_k}{a_{i_0,k}} \ge c_j - c_j = 0.$$

이제 pivot 이 $a_{i_0,k}$ 이 아닌 경우를 살펴보겠다: c_j 를 처음부터 음이 아니었던 “아래”의 성분이라고 하면

$$\hat{c}_j = c_j - \frac{a_{i_0,j}c_l}{a_{i_0,l}}$$

인데 여기에서 $c_l \ge 0,\ a_{i_0,l} < 0$ 이다. 이제 $a_{i_0,j}c_l$ 에 따라 경우를 나누어서 앞에서와 같이 확인할 수 있다. ■

[(2)의 증명] 다음의 두 가지 경우가 있을 수 있다:

- pivot 이 $a_{i_0,k}$ 인 경우
- pivot 이 $a_{i_0,k}$ 이 아닌 경우

먼저 pivot 이 $a_{i_o,k}$ 인 경우는

$$\hat{c}_k = -\frac{c_k}{a_{i_o,k}} = -\frac{\text{음}}{\text{양}} \ge 0 \ge c_k.$$

또, pivot 이 $a_{i_0,k}$ 이 아니면

$$\hat{c}_k = c_k - \frac{c_l a_{i_0,k}}{a_{i_0,l}}$$

인데 $c_l \ge 0$ 이고 $a_{i_0,k}$ 와 $a_{i_0,l}$ 의 부호는 다르므로

$$\frac{a_{i_0,k}}{a_{i_0,l}} < 0$$

이고 따라서

$$\hat{c}_k = c_k - \frac{c_l a_{i_0,k}}{a_{i_0,l}} = c_k - \text{양음} \ge c_k.$$

이렇게 (2)의 증명이 끝난다. ■

10.3 보기 들

지금까지 표를

$$\text{아래} \geq 0, \quad \text{오른} \geq 0$$

이도록 바꾸는 방법을 알아 보았다. 이제 표를 이용하여 최소값 문제를 풀어 보자.

보기 10.4. 다음

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\leq 6, \\ 3y_1 + 2y_2 &\leq 12, \\ y_1,\ y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

을 만족시키는 영역에서

$$-2y_1 + y_2$$

의 최소값을 계산해 보자.

제약조건을 살펴보면, 최소값 문제의 표준형으로 쓰여있지 않다. 부등호의 방향이 표준형의 그것과 반대이다. 그래서 다음과 같이 슬랙변수를 정의한다:

$$\begin{aligned} s_1 &= 6 - y_1 - 2y_2, \\ s_2 &= 12 - 3y_1 - 2y_2. \end{aligned}$$

이제 시작하는 심플렉스 표는 다음과 같다.

	s_1	s_2	
y_1	-1	$\boxed{-3}$	-2
y_2	-2	-2	1
1	6	12	0

‘‘아래”가 양수 들로 이루어져 있으므로 현재, 즉 $y_1 = y_2 = 0$ 인 점은 진짜꼭지점이다. 이제 ‘‘오른”에서 음수 성분은 첫번째 성분 -2 인데 이를 포함하는 행에는 음수가 2개 있다. 그래서 비교를 해보면

$$\left|\frac{6}{-1}\right| \geq \left|\frac{12}{-3}\right|$$

이므로 -3 을 기준으로 *pivot* 하면 다음 표를 얻는다.

	s_1	y_1	
s_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
y_2	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$
1	2	4	-8

‘‘아래”와 ‘‘오른”에 음의 성분이 없으므로 구하는 최소값은 -8 이고 이 값을 갖게 하는 꼭지점의 좌표를 계산하면

$$s_2 = 0,\ y_2 = 0,\ s_1 = 2,\ y_1 = 4$$

이다.

보기 10.5. 다음

$$\begin{aligned} 4y_1 - 2y_2 + 2y_3 &\leq 4, \\ -2y_1 + y_2 - y_3 &\geq -1, \\ y_1,\ y_2,\ y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

을 만족시키는 영역에서

$$-3y_1 - 2y_2 + 5y_3$$

의 최소값을 계산하여 보자.

제약조건을 살펴보면, 최소값 문제의 표준형으로 쓰여있지 않다. 부등호 하나의 방향이 표준형의 그것과 반대이다. 그래서 다음과 같이 슬랙변수를 정의한다:

$$\begin{aligned} s_1 &= -4y_1 + 2y_2 - 2y_3 + 4, \\ s_2 &= -2y_1 + y_2 - y_3 + 1. \end{aligned}$$

이제 심플렉스 표는 다음과 같다:

	s_1	s_2	
y_1	-4	-2	-3
y_2	2	1	$\boxed{-2}$
y_3	-2	-1	5
1	4	1	0

''아래''의 성분이 모두 양수이므로 현재 진짜꼭지점에 있는데, ''오른''을 보면 음수 성분이 2개 있다. 그 중에서 -2 가 있는 행을 보면, 거기에는 음수 성분이 없다. 따라서 최소값은 $-\infty$ 이다.

보기 10.6. 다음

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 + y_3 - y_4 &\geq 10, \\ y_1 - 2y_2 + 3y_3 - 4y_4 &\geq 6, \\ 3y_1 - 4y_2 + 5y_3 - 6y_4 &\geq 15 \\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

을 만족시키는 영역에서

$$2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 5y_4$$

의 최소값을 계산하여 보자.

제약조건은 표준형으로 쓰여 있다. 슬랙변수는

$$\begin{aligned} s_1 &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4 - 10, \\ s_2 &= y_1 - 2y_2 + 3y_3 - 4y_4 - 6, \\ s_3 &= 3y_1 - 4y_2 + 5y_3 - 6y_4 - 15 \end{aligned}$$

이고 심플렉스 표를 만들면 다음과 같다:

	s_1	s_2	s_3	
y_1	$\boxed{1}$	1	3	2
y_2	-1	-2	-4	3
y_3	1	3	5	4
y_4	-1	-4	-6	5
1	-10	-6	-15	0

''아래''의 성분 중에 음수가 있으므로 $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$ 인 현재의 꼭지점은 진짜꼭지점이 아니다. 그래서 $\boxed{1}$ 을 기준으로 *pivot* 하면 다음 표를 얻는다:

	y_1	s_2	s_3	
s_1	1	1	3	2
y_2				5
y_3				2
y_4				7
1	10	4	15	20

''아래"와 ''오른"이 모두 양수 들로 이루어져 있으므로 최소값은 20 이다. 이 최소값을 갖게끔하는 진짜꼭지점은 $y_1 = 10, s_2 = 4, s_3 = 15$ 인 점이다. 이로부터 이 꼭지점에서의 나머지 변수들의 값을 계산하면 $s_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$ 이다.

보기 10.7. 다음

$$\begin{aligned} y_1 &\le 4, \\ y_2 &\le 4, \\ y_1 + y_2 &\le 6 \\ -y_1 + 2y_3 &\le 4 \\ y_1,\ y_2,\ y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

을 만족시키는 영역에서

$$-y_1 + 2y_2 - y_3$$

의 최소값을 계산하여 보자.

제약조건을 확인하면 슬랙변수는 다음과 같이 정하여야 함을 알 수 있다:

$$\begin{aligned} s_1 &= -y_1 + 4, \\ s_2 &= -y_2 + 4, \\ s_3 &= -y_1 - y_2 + 6, \\ s_4 &= y_1 - 2y_3 + 4 \end{aligned}$$

시작하는 심플렉스 표는 다음과 같다:

	s_1	s_2	s_3	s_4	
y_1	-1	0	-1	1	-1
y_2	0	-1	-1	0	2
y_3	0	0	0	$\boxed{-2}$	-1
1	4	4	6	4	0

‘‘아래”에는 음의 성분이 없고, ‘‘오른”에는 음의 성분이 2개 있는데 그 중 위에 있는 -1 을 포함하는 행에는 다시 음수 성분이 2개 있고, 아래에 있는 -1 을 포함하는 행에는 음수 성분이 -2 하나만 있다. 그래서 이 -2 을 중심으로 *pivot* 하면 다음 표를 얻는다:

	s_1	s_2	s_3	y_3	
y_1	$\boxed{-1}$	0	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
y_2	0	-1	-1	0	2
s_4	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	4	4	6	2	-2

‘‘오른”에는 음의 성분이 하나만 있는데 그 성분을 포함하는 행에는 음수 성분이 2개 있다. 그런데

$$\left|\frac{4}{-1}\right| \leq \left|\frac{6}{-1}\right|$$

이므 $\boxed{-1}$ 을 중심으로 *pivot* 하면 다음 표를 얻는다:

	y_1	s_2	s_3	y_3	
s_1	-1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
y_2					2
s_4					$\frac{1}{2}$
1	4	4	2	4	-8

이 표의 ‘‘왼”과 ‘‘오른”에는 음수 성분이 없다. 그러므로 구하는 최소값은 -8 이다.

연습문제

1. 제약조건이

$$\begin{aligned} &y_1 + 2y_2 \geq 40, \\ &y_1 + y_2 \geq 30, \\ &y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   일 때, 표를 이용하여 $12y_1 + 16y_2$ 의 최소값을 구하여라.

2. 제약조건이

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}y_1 + y_2 \geq 6, \\ &2y_1 + 2y_2 \geq 14, \\ &y_1 + 4y_2 \geq 13, \\ &y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   일 때, 표를 이용하여 $24y_1 + 60y_2$ 의 최소값을 구하여라.

3. 제약조건이 다음과 같을 때, $y_1 + y_2 + y_3$ 의 최소값을 구하여라.

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &\geq 1, \\ y_2 + y_3 &\geq 1, \\ y_1 + y_3 &\geq 1, \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

4. 제약조건이

$$\begin{aligned} &3y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 10, \\ &4y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 12, \\ &y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

   일 때, 표를 이용하여 $5y_1 + 6y_2 + 7y_3$ 의 최소값을 구하여라.

5. 자연재해로 생긴 이재민 들을 네 곳의 시설 A, B, C, D 에 분산하여 수용하였는데, 시설별로 필요한 구호물품의 양은 다음과 같다.

(단위: 톤)	A	B	C	D
구호물품 필요량	20	15	10	25

구호물품은 창고 1 과 창고 2 에 있는데, 창고 1 에는 40톤, 창고 2 에는 30톤이 있다. 각 창고에서 수용시설까지 옮기는데 소용되는 비용은 운송물량의 무게에 비례하며 톤 당 비용은 다음과 같다.

	창고 1	창고 2
A	20	15
B	30	20
C	10	30
D	5	10

운송비용이 가장 작아지도록 운송계획을 짜라.

6. 우리 회사는 비타민 A, C, D 의 요구량을 충족시키면서 칼로리를 최소화하는 다이어트 식단을 개발 중이다. 쌀, 보리, 콩을 섞어서 한 끼의 식사를 마련하는데, 쌀, 보리, 콩 100 그램에 포함된 비타민 함유량을 조사한 표가 다음과 같다.

비타민	쌀	보리	콩	한 끼당 최소요구량
A	10	20	8	100
B	5	10	18	200
C	7	14	12	70

쌀 100 그램은 300 칼로리, 보리 100 그램은 100 칼로리, 콩 100 그램은 400 칼로리를 공급한다고 할 때, 칼로리를 최소화하는 식단을 짜라.

제 11 장

최대값 문제와 심플렉스 표

어떤 함수 f 가 x_o 에서 최대값을 갖는다면 함수 $-f$ 는 x_o 에서 최소값을 가질 것이고, 또 함수 f 가 x_1 에서 최소값을 갖는다면 함수 $-f$ 는 x_1 에서 최대값을 가질 것이다. 그렇다면, 최대값 문제는 최소값 문제이고 최소값 문제는 최대값 문제인가! 그런데 우리는 지금까지 최소값 문제를 해결하는 방법을 공부하였다. 이 단원에서는 최대값 문제의 심플렉스 표를 만드는 방법을 생각한다.

11.1 최대값 문제의 심플렉스 표

제약조건이

$$x_1,\ x_2 \geq 0, \quad x_1 + 2x_2 \leq 1, \quad 2x_1 + x_2 \leq 1$$

일 때, 목적함수

$$4x_1 + 5x_2$$

의 최대값을 구하는 문제를 표로 나타내고 이 표를 사용하는 방법을 설명하겠다.

주어진 문제는 똑같은 제약조건을 만족시키는 영역에서

$$-(4x_1 + 5x_2) = -4x_1 - 5x_2$$

의 최소값을 구하는 문제와 마찬가지이며 이때의 최소값의 마이너스 값이 처음 문제에서 구하는 최대값이 된다. 그래서 다음 최소값 문제를 생각한다:

- 제약조건은 처음과 같고

$$x_1,\ x_2 \geq 0, \quad x_1 + 2x_2 \leq 1, \quad 2x_1 + x_2 \leq 1$$

- 최소값을 구하려는 목적함수는 최대값을 구하려는 목적함수에 − 를 붙인

$$-4x_1 - 5x_2.$$

이제 앞 단원에서 최소값 문제를 풀 때 사용했던 방법을 그대로 적용하면 이러한 문제를 풀 수 있을 것처럼 보일지 모르겠지만, 앞에서 다루었던 표준형 최소값 문제와 이 최소값 문제를 비교해 보면 제약조건에 있는 부등호의 방향이 다름을 알 수 있을 것이다. 그래서 슬랙변수 u_1, u_2 를 다음과 같이 정의하면

$$\begin{aligned} u_1 &:= 1 - (x_1 + 2x_2) \\ u_2 &:= 1 - (2x_1 + x_2) \end{aligned}$$

다시 말하면

$$\begin{aligned} -u_1 &= x_1 + 2x_2 - 1 \\ -u_2 &= 2x_1 + x_2 - 1 \end{aligned}$$

주어진 문제의 제약조건을 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.[1)]

$$x_1,\ x_2,\ u_1,\ u_2\ \geq 0.$$

그리고 슬랙변수가 나타내는 연립일차방정식을 다음과 같이 표로 나타낼 수 있다.

	x_1	x_2	-1
$-u_1$	1	2	1
$-u_2$	2	1	1

이 표를 읽는 방법은 다음과 같다:

맨 위의 행벡터 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & -1 \end{bmatrix}$ 와 그 아래의 행벡터 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 과의 내적이 맨 왼쪽에 있는 $-u_1$ 이고, 맨 위의 행벡터 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & -1 \end{bmatrix}$ 와 그 아래 아래의 행벡터 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 과의 내적이 맨 왼쪽에 있는 $-u_2$ 이다:

$$\begin{aligned} -u_1 &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = x_1 + 2x_2 - 1, \\ -u_2 &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2x_1 + x_2 - 1. \end{aligned}$$

이제 최소값을 구하려는 그 목적함수 $-4x_1 - 5x_2$ 를 앞에서 만든 표에 등장시키기 위해 앞의 표를 늘인, 다음과 같은 표를 생각하자:

	x_1	x_2	-1
$-u_1$	1	2	1
$-u_2$	2	1	1
	-4	-5	0

여기에서 맨 아래에 덧붙여진 행벡터 $\begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ 과 독립변수로 이루어진 맨 위의 행벡터 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & -1 \end{bmatrix}$ 와의 내적이 목적함수 $-4x_1 - 5x_2$ 이다:

$$\begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & -1 \end{bmatrix} = -4x_1 - 5x_2.$$

최종적인 이 표가 맨 처음에 주어진 최대값 문제에 대한 심플렉스 표이다.[2)] 그러면

1) 부등호의 방향에 주의하여라.

2) 그러니까 이 표에서 맨 위쪽 독립변수들과 -1 로 이루어진 행벡터와 나머지 행벡터와의 내적들은, 마지막 것은 목적함수를 나타내고 나머지 것들은 (제약조건을 나타내는) 슬랙변수의 $-$ 를 나타내고 있다.

> 심플렉스 표에서 맨 위의 행에 쓰여있는 변수 들이 자유변수이고, 맨 왼쪽 열에 쓰여있는 변수 들이 기저변수이다.

그래서 위의 변수를 0 으로 놓으면 진짜이건 가짜이건 꼭지점을 얻는다. 이 꼭지점이 진짜인지 가짜인지는 왼쪽에 있는 기저변수의 값을 보면 알 수 있는데,

> 기저변수의 값은 맨 오른쪽 열에 있는 값이다.

현재의 표에서, 자유변수 x_1, x_2 가 결정하는 꼭지점에서의 기저변수의 값은 무엇인가 하면, 현재의 꼭지점에서는 $x_1 = x_2 = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} -u_1 &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = -1 \\ -u_2 &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -1 \end{aligned}$$

로서 기저변수 u_1, u_2 의 값은

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

와 같이 표의 맨 오른쪽 열벡터에 있는 값이다. 이 열벡터의 성분이 모두 ≥ 0 이므로 이 꼭지점 $x_1 = x_2 = 0$ 은 진짜꼭지점이다.[3)]

또한, 다음을 알 수 있다:

> 표의 맨 오른쪽 맨아래에 쓰여있는 값이 최대값을 구하려는 목적함수의 현재의 꼭지점에서의 값이다.

현재의 표에서 보면, 꼭지점 $x_1 = x_2 = 0$ 에서의 최소값을 구하려는 목적함수 $-4x_1 - 5x_2$ 의 값은

$$\begin{aligned} -4x_1 - 5x_2 &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

3) 제약조건은

$$x_1, x_2, u_1, u_2 \geq 0$$

이었다.

인데, 최대값을 구하려는 목적함수 $4x_1 + 5x_2$ 의 이 점에서의 값은

$$-0 = 0$$

으로서 표의 맨 아랜 오른쪽 귀퉁이에 있는 값 0 이 된다.

이제 표에서 변수 x_1 와 u_2 을 맞바꾸어 보자:[4] 이때에는 §8.3 에서의 pivot 규칙을 따르게 될 것이다:

$$\begin{array}{|c|cc|c|}\hline & x_1 & x_2 & -1 \\ \hline -u_1 & 1 & 2 & 1 \\ -u_2 & \boxed{2} & 1 & 1 \\ \hline & -4 & -5 & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|cc|c|}\hline & u_2 & x_2 & -1 \\ \hline -u_1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -x_1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 2 & -3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

이때, 바뀐 오른쪽 표가 알려주는 것은 다음과 같다:

- 자유변수는 위에 있는 u_2, x_2 이고 기저변수는 왼쪽에 있는 u_1, x_1 이다.
- 왼쪽에 있는 기저변수를 다음과 같이 자유변수로 나타낼 수 있다:

$$\begin{aligned} -u_1 &= \begin{bmatrix} u_2 & x_2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}u_2 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}, \\ -x_1 &= \begin{bmatrix} u_2 & x_2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- 목적함수를 다음과 같이 자유변수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} u_2 & x_2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} = 2u_2 - 3x_2 - 2.$$

4) 여기에서 맨 마지막 행(즉, 목적함수를 나타내는 행)은 방정식을 나타내는 것이 아니므로 위와 같은 pivot rule 을 적용하는 것은 이상하다고 생각할 수도 있겠다. 그렇다면

$$\begin{array}{|c|cc|c|}\hline & x_1 & x_2 & -1 \\ \hline -u_1 & 1 & 2 & 1 \\ -u_2 & 2 & 1 & 1 \\ \hline v & -4 & -5 & 0 \\ \hline \end{array}$$

와 같이 새로운 변수 v 를 써넣고 맨 마지막 행은 방정식

$$v = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 \end{bmatrix} = -4x_1 - 5x_2$$

을 나타낸다고 생각하면 될 것이다.

- $u_2 = x_2 = 0$ 인 꼭지점에서는, 왼쪽에 있는 기저변수의 값이

$$\begin{aligned} -u_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}, \\ -x_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

  즉,

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

  와 같이, 다시 표의 오른쪽 열의 값들과 같아진다. 제약조건을 만족시키므로 새로운 이 꼭지점은 진짜꼭지점이다.

- 그 꼭지점에서의 목적함수 $2u_2 - 3x_2 - 2$ 의 값은

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} = -2$$

  인데 이 값은 최소값 문제에서의 목적함수

$$-4x_1 - 5x_2$$

  의 값이다.[5)] 그런데 애당초의 문제는 함수 $4x_1 + 5x_2$ 의 최대값을 구하는 것이었음을 기억하자. 그러면 이 함수

$$4x_1 + 5x_2$$

  의 이 꼭지점에서의 값은 $-(-2) = 2$ 로서 표의 오른쪽 맨아래 모퉁이의 값이다.

최대값 문제에서의 목적함수의 현재의 꼭지점에서의 값이 표의 오른쪽 아래 귀퉁이에 쓰여 있는 값이다.

교묘하지 않은가! 최대값 문제를 최소값 문제로 바꾸어서 어찌어찌 표를 만들어서 이 표를 바꾸어 나가는데 최종적인 표에 나타나는 값은 최소값이 아니라 애당초 구하려던 최대값이라니... 음...

이제 앞의 표에서 변수 x_2 와 u_1 을 바꾸어 보자:

5) 함수 $2u_2 - 3x_2 - 2$ 는 함수 $-4x_1 - 5x_2$ 를 현재의 꼭지점에서의 자유변수로 나타낸 것이다.

$$
\begin{array}{|c|cc|c|}
\hline
 & u_2 & x_2 & \\
\hline
-u_1 & -\frac{1}{2} & \boxed{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} \\
-x_1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\hline
1 & 2 & -3 & 2 \\
\hline
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{|c|cc|c|}
\hline
 & u_2 & u_1 & -1 \\
\hline
-x_2 & & & \frac{1}{3} \\
-x_1 & & & \frac{1}{3} \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
\end{array}
$$

이 표에서 자유변수는 u_2, u_1 인데, 꼭지점 $u_2 = u_1 = 0$ 에서 기저변수 x_2, x_1 의 값은 오른쪽에 있는 값으로서

$$x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_1 = \frac{1}{3}$$

이므로, 꼭지점 $u_2 = u_1 = 0$ 는 진짜꼭지점임을 안다. 뿐만 아니라, 최소값을 찾고자 하는 목적함수는

$$\begin{bmatrix} u_2 & u_1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = u_2 + 2u_1 - 3$$

으로서, 자유변수 u_2, u_1 에 대한 계수들이 모두 ≥ 0 이므로, 이 꼭지점에서의 최소값을 찾고자 하는 목적함수의 값이 최소값임을 알고, 그 최소값은

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

이다. 그러므로 애당초에 최대값을 구하려 했던 목적함수의 값은

$$-(-3) = 3$$

인데, 이것은 표의 맨 오른쪽 아래 귀퉁이에 쓰여 있는 값이다. 이렇게 해서 맨 처음에 구하려 하였던 최대값을 구하였다.

이 표는 맨 오른쪽의 열벡터와 맨 아래의 행벡터가 모두 음이 아닌 수로 이루어져 있는데,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \geq 0 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \geq 0,$$

이런 꼴의 심플렉스 표는 다음과 같이 매우 중요한 성질을 갖고 있다.

1. 이 꼭지점에서의 모든 변수의 값은

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

이므로 이 꼭지점은 제약조건을 모두 만족시키는 진짜꼭지점이다.

그러니까, 심플렉스 표에서 오른 ≥ 0 이면 위 $= 0$ 으로 표시되는 꼭지점은 진짜꼭지점이라는 것이다.

2. 이 꼭지점에서의 (애당초의) 목적함수의 값은

$$\begin{aligned} -v &= -\begin{bmatrix} u_2 & u_1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 3 \end{aligned}$$

인데 예를 들어서, 다른 진짜꼭지점 $u_2 = a, u_1 = b$ 이 있다면 이 진짜꼭지점에서의 목적함수의 값은

$$-\begin{bmatrix} a & b & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = -a - 2b + 3$$

일 것이다. 그런데 이 꼭지점이 진짜꼭지점이기 위해서는

$$u_2 = a \geq 0,\ u_1 = b \geq 0$$

이어야 할 것이고 그렇다면

$$-a - 2b + 3 \leq 3$$

이다. 즉, 꼭지점 $u_2 = u_1 = 0$ 에서의 목적함수의 값이 다른 어떠한 진짜꼭지점에서의 목적함수의 값보다도 작을 수가 없다.

그러니까 심플렉스 에서 오른 ≥ 0 이면, 꼭지점 윈 $= 0$ 에서의 목적함수의 값인 표의 오른쪽 맨 아래에 있는 값이 우리가 구하는 최대값이라는 것이다.

지금까지 설명한, 최대값 문제를 푸는 방법을 정리하면 다음과 같다.

(1) 목적함수에 – 를 곱하여 최소값 문제로 바꾼다.

(2) 슬랙변수를 도입하고 제약조건들을 방정식으로 바꾼다.

(3) 목적함수까지를 포함한 심플랙스 표를 만든다.

(4) 적절히 pivot 을 하여, 주어진 를

		-1
		≥ 0
	≥ 0	♠

와 같은 꼴이 되도록 바꿀 수 있다면, 진짜 꼭지점

$$\begin{bmatrix} \quad \text{위} \quad \end{bmatrix} = 0, \quad -\begin{bmatrix} \text{왼} \\ \text{쪽} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{오} \\ \text{른} \end{bmatrix}$$

에서의 값인 ♠ 가 우리가 구하고자 하는 최대값이다.

연습문제

1. 다음 최대값 문제의 표를 만들어라.

a) 목적함수는 $3x_1 + 4x_2$ 이고 제약조건은

$$x_1 + x_2 \leq 2, \quad 2x_1 + x_2 \leq 6, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

b) 목적함수는 $6x_1 + 4x_2 + 3x_3$ 이고 제약조건은

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1, \quad -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

c) 목적함수는 $x_1 - x_2 + x_3$ 이고 제약조건은

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad x_1 + x_2 - x_3 \geq 0, \quad x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq -1, \quad x_1 - x_3 \geq 2.$$

2. 왼쪽 표에서 주어진 원소를 기준으로 pivot 하여 오른쪽 표를 완성하여라.

	x_1	x_2	-1
$-u_1$	1	$\boxed{2}$	1
$-u_2$	2	1	1
	-4	-5	0

$\Rightarrow$

제 12 장

심플렉스 표를 이용한 최대값 계산

주어진 표준형 최대값 문제를 표로 만든 다음에 적절하게 pivot 해서 다음과 같은 꼴로 바꿀 수 있다면

		-1
		≥ 0
	≥ 0	♠

주어진 최대값 문제를 풀 수 있으며 그 최대값은 ♠ 가 됨을 알았다. 이 단원에서는 주어진 최대값 문제의 표를 어떻게 하면 위와 같은 꼴의 표로 바꿀 수 있는지를 알아 보겠다.

12.1 오른 ≥ 0 일 때=진짜꼭지점에서

최대값 문제의 표에서 ″위″에 있는 자유변수가 0 인 점은, 꼭지점을 나타내는데, 이에 더불어서 만일 오른 ≥ 0 이면, 이 꼭지점은 진짜꼭지점이다. 다시 말하면, 오른≥ 0 인 표는, 현재 진짜꼭지점에 있음을 말하고 있다는 것이다. 그러면 이때, 어떻게 하면 아래 ≥ 0 이도록 표를 바꾸어 나갈 지를 알아 보겠다. 다시 말하면 우리 목표는

$$\text{아래} \geq 0$$

이다. 이때에는 먼저 아래의 성분 들의 부호를 조사한다. 그러면 다음 두 가지 경우가 있을 수 있다:

- 성분이 모두 ≥ 0 인 경우
- 성분 들 중에서 < 0 인 성분이 있는 경우

첫번째의 경우는, 앞 단원에서 설명하였듯이 이미 최대값을 찾은 것이며 표의 오른쪽 귀퉁이에 쓰여 있는 값이 최대값이라는 것을 안다.

그러므로 두번째의 경우, 즉, < 0 인 성분이 있는 경우에 대해서만 알아보면 되겠다.

이제 ″아래″의 j_o 번째 성분인 c_{j_o} 가 음의 값을 갖는다고 하자. 그러면 그 원소를 포함하는 열벡터(그러니까 j_o 번째 열벡터)의 성분 중에서 양수인 성분을 찾는다. 이때 또 다음과 같은 두 가지 경우가 있을 수 있다.

- 그런 성분이 있는 경우
- 그런 성분이 없는 경우

12.1.1 오른> 0 인데 아래가 < 0 인 열에 > 0 인 성분이 있을 때

오른> 0 인데 아래가 < 0 인 열에 > 0 인 성분이 있을 때, 표를 바꾸어나가는 방법에 대해서 알아보자.

이제 > 0 인 성분이 있는 경우에, 만일 한개만 있으면 그 성분을 중심으로 pivot 하고, 그런 성분이 여러개(a_{i,j_o} 로 표시하였다)이면

$$\frac{b_i}{a_{i,j_o}}\text{가 가장 작아지는 성분}$$

a_{i,j_o} 을 중심으로 pivot한다. 여기에서 b_i 는 a_{ij_o} 가 있는 행벡터의 맨 오른쪽에 있는 ″오른″의 원소이다.

$$\begin{array}{ccc|c}
 & \vdots & & \\
\cdots & a_{i,j_o} > 0 & \cdots & b_i > 0 \\
 & \vdots & & \\
\hline
 & c_{j_o} < 0 & &
\end{array}$$

보기 12.1. (*a*) 다음 표에서 맨 아래 행의 첫번째 원소가 음수이다. 그러므로 첫번째 열의 원소 중에서 양수인 성분을 찾는다. 그랬더니 첫번째 열에서 양수인 원소는 1 하나 뿐이다. 그러므로 1 을 중심으로 *pivot* 할 수 있다. 또, 맨 아래 행의 두번째 원소가 음수이다. 그러므로 두번째 열의 원소 중에서 양수인 성분을 찾는다. 그랬더니 두번째 행에서 양수인 원소는 1 하나 뿐이다. 그러므로 1 를 중심으로 *pivot* 할 수도 있다.

			-1
	$\boxed{1}$	-3	2
	-2	$\boxed{1}$	3
	-1	-2	*0*

(*b*) 다음 표에서 맨 아래 행의 두번째 원소가 음수이다. 그러므로 두번째 열의 원소 중에서 양수인 성분을 찾는다. 그랬더니 첫번째 원소와 세번째 원소가 양수인데, 첫번째 원소 2에 대해서는

$$\frac{b_j}{a_{i,j_o}} = \frac{1}{2}$$

이고 세번째 원소 5에 대해서는

$$\frac{b_j}{a_{i,j_o}} = \frac{3}{5}$$

인데 $\frac{1}{2} < \frac{3}{5}$ 이므로 첫번째 원소 2 를 중심으로 *pivot* 한다.

$$
\begin{array}{|c|ccc|c|}
\hline
 & & & & \\
\hline
 & -2 & \boxed{2} & -3 & 1 \\
 & 1 & -3 & 4 & 2 \\
 & -2 & 5 & -1 & 3 \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & \mathit{0} \\
\hline
\end{array}
$$

이 절에서 설명한 방식으로 pivot 을 하면 , 처음의 표와 새로 만들어질 표의 관계는 다음과 같아진다:

(1) ″오른″ 의 부호는 변함이 없다.[1] 즉,

$$\text{오른} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{오른} \geq 0.$$

(2) 새로운 꼭지점에서의 목적함수의 값은 더 작아지지는 않는다.[2]

[(1)의 증명] Pivot 의 중심을 a_{i,j_o} 라고 하자.

$$
\begin{array}{ccc|c}
 & \vdots & & \vdots \\
\cdots & \boxed{a_{i,j_o}} & \cdots & b_i \geq 0 \\
 & \vdots & & \vdots \\
\cdots & a_{k,j_o} & \cdots & b_k \geq 0 \\
 & \vdots & & \vdots \\
\hline
\cdots & c_{j_o} & \cdots & v
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ccc|c}
 & \vdots & & \vdots \\
\cdots & \widehat{a_{i,j_o}} & \cdots & \hat{b_i} \\
 & \vdots & & \vdots \\
\cdots & \widehat{a_{k,j_o}} & \cdots & \hat{b_k} \\
 & \vdots & & \vdots \\
\hline
\cdots & \widehat{c_{j_o}} & \cdots & \hat{v}
\end{array}
$$

이제, pivot의 맨 오른쪽 원소는

$$\hat{b_i} = \frac{b_i}{a_{i,j_o}} = \frac{\text{양}}{\text{양}} = \text{양}$$

이고 다른 데의 맨 오른쪽 원소는

$$\hat{b_k} = b_k - \frac{a_{k,j_o} b_i}{a_{i,j_o}}$$

1) 처음의 표가 나타내는 꼭지점은 진짜꼭지점이었는데 새로 만들어진 표가 나타내는 꼭지점도 여전히 진짜 꼭지점을 나타내게 된다는 것이다.

2) 그러니까 이와 같은 과정은 목적함수의 값이 줄어들지 않도록 진짜 꼭지점을 찾아 나가는 과정이라고 할 수 있다.

인데

1. 만일 $a_{k,j_o} \leq 0$ 이면
$$\frac{a_{k,j_o} b_i}{a_{i,j_o}} = \frac{\text{음양}}{\text{양}} = \text{음}$$
이므로
$$\hat{b_k} = b_k - \frac{a_{k,j_o} b_i}{a_{i,j_o}} = b_k - \text{음} \geq b_k \geq 0.$$

2. 만일 $a_{k,j_o} > 0$ 이면
pivot a_{i,j_o} 를 선택한 방법 때문에
$$\frac{b_k}{a_{k,j_o}} \geq \frac{b_i}{a_{i,j_o}} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{k,j_o} b_k}{a_{k,j_o}} \geq \frac{a_{k,j_o} b_i}{a_{i,j_o}}$$
이고 따라서
$$\hat{b_k} = b_k - \frac{a_{k,j_o} b_i}{a_{i,j_o}} \geq b_k - \frac{a_{kj_o} b_k}{a_{kj_o}} = b_k - b_k = 0.$$

이로서 (1)의 증명이 끝난다. ■

[(2)의 증명] 다음 계산
$$\hat{v} = v - \frac{c_{j_o} b_i}{a_{i,j_o}} = v - \frac{\text{음양}}{\text{양}} = v + \text{양} \geq v$$
으로부터 (2)가 증명된다. ■

보기 12.2. 다음 표에서 ″오른″은 여전히 ≥ 0 이고 목적함수의 값인 오른쪽 아래 귀퉁이의 값은 줄어들지 않는다.

				-1
	$\boxed{2}$	2	-3	1
	-1	3	4	2
	-2	5	-1	3
	-1	2	1	0

$\Rightarrow$

				-1
				$\frac{1}{2}$
				$\frac{5}{2}$
				4
	$\frac{1}{2}$	3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

12.1.2 오른> 0 인데 아래가 < 0 인 열에 > 0 인 성분이 없을 때

이제 오른> 0 인데 아래가 < 0 인 열에 > 0 인 성분이 없는 경우에 대해 알아보자. 이때는 다음의 표

$$
\begin{array}{|c|ccc|c|}
\hline
 & \cdots & \heartsuit & \cdots & -1 \\
\hline
-\diamondsuit & & \clubsuit & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
-\diamondsuit & \cdots & \clubsuit & \cdots & b \geq 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
-\diamondsuit & & \clubsuit & & \vdots \\
\hline
 & \cdots & c \leq 0 & \cdots & \spadesuit \\
\hline
\end{array}
$$

에서

$$\clubsuit \leq 0$$

이라는 것이다. 위쪽에 있는 변수와 왼쪽에 있는 변수가 모두 ≥ 0 인 점이 제약조건을 만족시키는, 가능영역의 점임을 기억하자. 이제 이 표에서 다음을 안다.

- 왼쪽의 변수 $\diamondsuit$ 는

  $$-\diamondsuit = \begin{bmatrix} \cdots & \heartsuit & \cdots & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cdots & \clubsuit & \cdots & b \end{bmatrix}$$

  을 만족하고

- 최대값을 구하려는 목적함수의 값은

  $$\text{목적함수} = -\begin{bmatrix} \cdots & \heartsuit & \cdots & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cdots & c & \cdots & \spadesuit \end{bmatrix}$$

  이다.

이제 위쪽 변수 중에서 나머지 변수는 모두 0 이고 $\heartsuit$ 만 양수인 점을 생각해 보자. 그러면 이 점에서의 $\heartsuit$ 값은 양수이고 또 가정으로부터 $\clubsuit \leq 0,\ b \geq 0$ 이므로

$$-\diamondsuit = \begin{bmatrix} 0 & \heartsuit & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cdots & \clubsuit & \cdots & b \end{bmatrix} = \heartsuit\clubsuit - b = \text{양음} - \text{양} \leq 0$$

이다. 즉, 위쪽 변수 중에서 나머지 변수는 모두 0 이고 $\heartsuit$ 만 양수인 점은, 나머지 변수들 $\diamondsuit \geq 0$ 이므로 제약조건을 만족시키는 점이다. 그런데 이 점에서의 최대값을

구하려는 목적함수의 값은

$$-\begin{bmatrix} 0 & \heartsuit & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cdots & c & \cdots & \spadesuit \end{bmatrix} = -c\heartsuit + \spadesuit = -\text{음}\heartsuit + \spadesuit$$

이므로 양수인 $\heartsuit$ 값을 계속 크게하면 이 값은 계속 커지게 된다. 그러므로 이러한 문제의 최대값은 ∞ 이 됨을 알 수 있다. ■

12.2 "오른"에 <0 인 성분이 있을 경우=진짜꼭지점 찾기

지금까지 진짜꼭지점을 찾았을 때, 즉 심플렉스 표에서

$$\text{오른} \geq 0$$

인 경우에는 어떻게 심플렉스 표를 바꾸어 나가야 하는지를 설명하였다. 이제 남은 경우는, "오른"의 성분 중에서 음의 값을 갖는 성분이 있는 경우이다. 이러한 표에서의 꼭지점은 현재 진짜꼭지점이 아니다.

이제 "오른"의 성분 중에서 음의 값을 갖는 성분이 있으면, 이러한 성분 중에서 처음 등장하는 성분을 택한다. 그 성분을 b_k 라고 하고[3)] 이것을 포함하는 행벡터의 성분을 살펴 본다. 그러면 다음 두 가지 경우가 있을 수 있다:

- 성분이 모두 ≥ 0 인 경우
- <0 인 성분이 있을 경우

12.2.1 오른<0 인 행의 성분이 모두 ≥ 0 인 경우

오른<0 인 행의 성분이 모두 ≥ 0 인 경우에 대해서 알아보자.

이 경우의 표는 다음과 같을 것이다:

	$\cdots \quad \geq 0 \quad \cdots \quad \geq 0 \quad \cdots$	-1
$-\diamondsuit$	$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$ $\cdots \quad \geq 0 \quad \cdots \quad \geq 0 \quad \cdots$ $\cdots \quad \cdots \quad \cdots$	$b_k < 0$

제약조건을 만족시키는 가능영역의 점이 있다면, 그 점에 대해서는 위의 변수와 왼쪽 변수의 값이 모두 ≥ 0 이어야 하므로, 우선 위의 변수의 값이 모두 ≥ 0 이다. 그리고

3) 그러니까 $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1} \geq 0$ 이라는 것이다.

가정으로부터 오른쪽에 b_k 가 있는 행의 원소 들은 모두 ≥ 0 이다. 그러면 왼쪽에 있는 변수 $\diamondsuit$ 에 대하여

$$-\diamondsuit = \text{양양} - b_k = \text{양양} + \text{양} = \text{양}$$

이므로 $\diamondsuit < 0$ 이어서 모순이다. 다시 말하면, 오른< 0 인 행의 성분이 모두 ≥ 0 인 경우에는 가능영역은 공집합이다. ■

12.2.2 오른< 0 인 행에 < 0 인 성분이 있는 경우

오른< 0 인 행에 < 0 인 성분이 있는 경우에 대해서 알아보자.

"오른"의 k 번째 성분 b_k 음이고, 이를 포함하는 행의 원소 중에서 음의 성분을 고른다. 음의 성분이 여러개이면 그 중 아무거나 하나를 고른다. 이것을 a_{k,j_o} 라고 하자.

	$\vdots$ $\cdots \quad a_{k,j_o} < 0 \quad \cdots$ $\vdots$	$\vdots$ $b_k < 0$ $\vdots$

이제, $b_i \geq 0$ 이고 $a_{i,j_o} > 0$ 인 원소들에 대하여

$$\frac{b_k}{a_{k,j_o}} \text{ 와 } \frac{b_i}{a_{i,j_o}}$$

를 모두 비교하여 그 값이 가장 작은 것을 고른다. 그런 것이 여러개이면 그 중 아무거나 하나를 고른다. 이것을 a_{i_o,j_o} 라고 하면 이 a_{i_o,j_o} 를 중심으로 pivot 한다.

	$\vdots$	$\vdots$
	$\cdots \quad a_{i,j_o} > 0 \quad \cdots$	$b_i > 0$
	$\vdots$	$\vdots$
	$\cdots \quad a_{k,j_o} < 0 \quad \cdots$	$b_k < 0$
	$\vdots$	$\vdots$

보기 12.3. 다음의 표에서 오른쪽에 음수가 있는 행은 두번째 행과 세번째 행이다.

두번째 행의 첫번째 원소가 음수 -1 이고 이 행의 마지막 원소와의 비는 $\frac{(-1)}{(-1)} = 1$ 이며, 첫번째 행의 첫번째 원소와 마지막에 원소와의 비는 $\frac{2}{3}$ 인데, $\frac{2}{3} < 1$ 이므로 $\boxed{3}$ 을 기준으로 *pivot* 할 수 있다.

두번째 행의 두번째 원소가 음수 -2 이고 이 행의 마지막 원소와의 비는 $\frac{(-1)}{(-2)} = \frac{1}{2}$ 이며, 첫번째 행의 두번째 원소와 마지막에 원소와의 비는 $\frac{2}{1} = 2$ 인데, $\frac{1}{2} < 2$ 이므로 $\boxed{-2}$ 을 기준으로 *pivot* 할 수 있다.

세번째 행의 첫번째 원소가 음수 -1 이고 이 행의 마지막 원소와의 비는 $\frac{(-2}{(-1)} = 2$ 이며, 첫번째 행의 첫번째 원소와 마지막에 원소와의 비는 $\frac{2}{3}$ 인데, $\frac{2}{3} < 2$ 이므로 $\boxed{3}$ 을 기준으로 *pivot* 할 수 있다.

	$\boxed{3}$	1	0	2
	-1	$\boxed{-2}$	2	-1
	-1	0	-1	-2

이렇게 pivot 을 하면 새로운 표는 다음과 같아진다:

(1) 음이 아니었던 ”오른”의 성분은 여전히 음이 아니다.

(2) 처음에 음의 값을 가졌던 그 b_k 의 값은 더 작아지지는 않는다.

[(1)의 증명] Pivot 이 a_{k,j_o} 인 경우와 a_{k,j_o} 가 아닌 경우가 있다.

먼저 Pivot 이 a_{k,j_o} 인 경우를 살펴보겠다: 이때는

$$a_{k,i_o} < 0, \quad b_k < 0$$

이다. 이제 b_i 를 처음부터 음이 아니었던 “오른”의 성분이라고 하면 $i \neq k$ 이고

$$\hat{b}_i = b_i - \frac{a_{i,j_o} b_k}{a_{k,j_o}}.$$

(i) 만일 $a_{i,j_o} < 0$ 이면

$$\hat{b}_i = b_i - \frac{a_{i,j_o} b_k}{a_{k,j_o}} = b_i - \frac{\text{음음}}{\text{음}} = b_i + \text{양} \geq b_i \geq 0.$$

(ii) 만일 $a_{i,j_o} \geq 0$ 이면, a_{k,j_o} 가 pivot으로 선택되기 위해서는

$$0 < \frac{b_k}{a_{k,j_o}} \leq \frac{b_i}{a_{i,j_o}}$$

이어야 하고 또 a_{i,j_o} 는 양수이므로

$$\hat{b_i} = b_i - \frac{b_k}{a_{k,j_o}} a_{i,j_o} \geq b_i - \frac{b_i}{a_{i,j_o}} a_{i,j_o} = b_i - b_i = 0.$$

이제 pivot 이 $a_{i_o,k}$ 이 아닌 경우를 살펴보겠다: pivot 을 a_{i_o,j_o} 라고 하면

$$a_{i_o,j_o} > 0, \quad b_{i_o} > 0$$

이다. 이제 b_i 를 처음부터 음이 아니었던 “오른”의 성분이라고 하면

$$\hat{b}_i = b_i - \frac{a_{i,j_o} b_{i_o}}{a_{i_o,j_o}}$$

인데 여기에서

$$\frac{b_{i_o}}{a_{i_o,j_o}} \geq 0$$

이다. 그러므로

만일 $a_{i,j_o} \leq 0$ 이면

$$\hat{b_i} = b_i - \text{음양} \geq b_i \geq 0.$$

만일 $a_{i,j_o} > 0$ 이면, pivot 을 선택한 방법으로부터

$$0 < \frac{b_{i_o}}{a_{i_o,j_o}} \leq \frac{b_i}{a_{i,j_o}}$$

이므로

$$\hat{b_i} = b_i - \frac{a_{i,j_o} b_{i_o}}{a_{i_o,j_o}} \geq b_i - \frac{a_{i,j_o} b_i}{a_{i,j_o}} = b_i - b_i = 0.$$

이로서 (1)의 증명이 끝났다. ■

[(2)의 증명] Pivot 이 a_{k,j_o} 인 경우와 a_{k,j_o} 가 아닌 경우가 있다.

먼저 pivot 이 a_{k,j_o} 인 경우를 살펴보겠다: 이때는 $b_k < 0, a_{k,j_o} < 0$ 이므로

$$\hat{b}_k = \frac{b_k}{a_{k,j_o}} = \frac{\text{음}}{\text{음}} = \text{양} > b_k.$$

이제 pivot 이 a_{k,j_o} 이 아닌 경우를 살펴보겠다: pivot 을 a_{i_o,j_o} 라고 하면

$$a_{i_o,j_o} > 0, \quad b_{i_o} > 0$$

이다. 이제

$$\hat{b}_k = b_k - \frac{a_{k,j_o} b_{i_o}}{a_{i_o,j_o}} = b_k - \frac{\text{음양}}{\text{양}} = b_k + \text{양} \geq b_k.$$

이로서 (2)의 증명이 끝났다. ■

12.3 보기들

보기 12.4. 다음

$$x_1 + 3x_2 \geq 2,$$
$$2x_1 + 2x_2 \geq -1,$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

을 만족시키는 영역에서

$$-6x_1 - 12x_2$$

의 최대값을 구해 보자.

제약조건을 살펴보면, 최대값 문제의 표준형으로 쓰여있지 않다. 그래서 표준형으로 고치면

$$\begin{aligned} -x_1 - 3x_2 &\leq -2, \\ -2x_1 - 2x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

이 된다. 이제 이 표준형 최대값 문제의 심플렉스 표를 만들면 다음과 같다.

	x_1	x_2	-1
$-u_1$	-1	$\boxed{-3}$	-2
$-u_2$	-2	-2	1
	6	12	0

‘‘오른”에 음수 성분이 있으므로 ‘‘위”에 있는 자유변수 $x_1 = x_2 = 0$ 인 현재의 꼭지점은 진짜꼭지점이 아니다. 그래서 ‘‘오른”의 음수 성분 -2 가 있는 행의 원소 -3 을 기준으로 *pivot* 하면 다음 표를 얻는다.

	x_1	u_1	-1
$-x_2$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$-u_2$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$
	2	4	-8

‘‘아래’’와 ‘‘오른’’에 음의 성분이 없으므로 구하는 최대값은 -8 이고 이 값을 갖게 하는 꼭지점의 좌표를 계산하면

$$x_1 = u_2 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3},\ u_2 = \frac{7}{3}$$

이다.

보기 12.5. 다음

$$\begin{aligned} -4x_1 - 2x_2 &\le -3 \\ -2x_1 + x_2 &\le -2, \\ -2x_1 - x_2 &\le 5, \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

을 만족시키는 영역에서

$$-4x_1 - x_2$$

의 최대값을 계산하여 보자.

표준형으로 쓰여있는 이 문제의 심플렉스 표는 다음과 같다:

	x_1	x_2	-1
$-u_1$	-4	-2	-3
$-u_2$	2	1	$\boxed{-2}$
$-u_3$	-2	-1	5
	4	1	0

‘‘오른’’에 음수 성분이 있으므므로 현재의 꼭지점 $x_1 = x_2 = 0$ 은 진짜꼭지점이 아니다. ‘‘오른’’에는 음수 성분이 -3 과 -2 두 개가 있는데, -2 가 있는 행의 나머지 성분 들은 모두 양수이다. 그러므로 이 문제의 가능영역은 공집합이다.

보기 12.6. 다음

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 2, \\ -x_1 - 2x_2 - 4x_3 &\le 3, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\le 4, \\ -x_1 - 4x_2 - 6x_3 &\le 5, \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

을 만족시키는 영역에서

$$10x_1 + 6x_2 + 15x_3$$

의 최대값을 구해 보자.

현재 이 문제는 표준형으로 쓰여 있다. 이 문제의 심플렉스 표를 만들면

	x_1	x_2	x_3	-1
$-u_1$	$\boxed{1}$	1	3	2
$-u_2$	-1	-2	-4	3
$-u_3$	1	3	5	4
$-u_4$	-1	-4	-6	5
	-10	-6	-15	0

인데, ''오른''이 모두 양수이므로 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 인 현재의 꼭지점은 진짜꼭지점이다. 이제, ''아래''에 있는 -10 을 갖고 있는 열에 있는 1 을 기준으로 *pivot* 하면 다음 표를 얻는다.

	u_1	x_2	x_3	-1
$-x_1$	1	1	3	2
$-u_2$				5
$-u_3$				2
$-u_4$				7
	10	4	15	20

이 표에서 ''아래''와 ''오른''이 모두 양수 들로 이루어져 있으므로 구하는 최대값은 20 이다. 이 최대값을 갖게끔하는 진짜꼭지점은 $u_1 = 10, x_2 = 4, x_3 = 15$ 인 점이다. 이로부터 이 꼭지점에서의 나머지 변수들의 값을 계산하면 $x_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ 이다.

보기 12.7. 다음

$$\begin{aligned} -x_1 - x_3 + x_4 &\le -1, \\ -x_2 - x_3 &\le 2, \\ -2x_4 &\le -1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

을 만족시키는 영역에서

$$-4x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 4x_4$$

의 최대값을 계산하여 보자.

표준형으로 쓰여있는 이 문제의 심플렉스 표는 다음과 같다:

	x_1	x_2	x_3	x_4	-1
$-u_1$	-1	0	-1	1	-1
$-u_2$	0	-1	-1	0	2
$-u_3$	0	0	0	$\boxed{-2}$	-1
	4	4	6	4	0

''오른''에는 음의 성분이 2개 있는데 그 중 위에 있는 -1 을 포함하는 행에는 다시 음수 성분이 2개 있고, 아래에 있는 -1 을 포함하는 행에는 음수 성분이 -2 하나만 있다. 그래서 이 -2 을 중심으로 *pivot* 하면 다음 표를 얻는다:

	x_1	x_2	x_3	u_3	-1
$-u_1$	$\boxed{-1}$	0	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$-u_2$	0	-1	-1	0	2
$-x_4$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	4	4	6	2	-2

''오른''에는 음의 성분이 하나만 있는데 그 성분을 포함하는 행에 있는 -1 을 중심으로 *pivot* 하면 다음 표를 얻는다:

	u_1	x_2	x_3	u_3	-1
$-x_1$	-1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$-u_2$					2
$-x_4$					$\frac{1}{2}$
	4	4	6	4	-8

이 표의 ''왼''과 ''오른''에는 음수 성분이 없다. 그러므로 구하는 최소값은 -8 이다.

연습문제

1. 제약조건이 다음과 같을 때, $40x_1 + 30x_2$ 의 최대값을 구하여라.

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \le 12, \\ &2x_1 + x_2 \le 16, \\ &x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

2. 제약조건이 다음과 같을 때, $6x_1 + 14x_2 + 13x_3$ 의 최대값을 구하여라.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 \le 24, \\ &x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 60, \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

3. 제약조건이 다음과 같을 때, 함수 $2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4$ 가 최대값을 갖게 되는 점 $(x_1, x_2, x_3, x_4) \ge 0$ 을 구하여라.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_4 &\le 0, \\ 2x_1 + x_2 &\le 3, \\ x_2 + 4x_3 + x_4 &\le 3. \end{aligned}$$

4. 제약조건이 다음과 같을 때, $x_1 + 2x_2 - x_3$ 의 최대값을 구하여라.

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 + x_3 \le 14, \\ &4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 28, \\ &2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \le 30, \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

5. 제약조건이 다음과 같을 때, $12x + 15y + 5z$ 의 최대값을 구하여라.

$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &\le 8, \\ x + 4y - 3z &\le 12, \\ x, y, z &\ge 0. \end{aligned}$$

6. 다음 표는 어떤 공장에서 원료 P, Q, R 을 사용하여 제품 A, B, C 를 각각 한 개씩 생산하는데 필요한 원료의 소모량과 하루 최대 공급량을 나타낸 것이다. 세 제품 A, B, C 를 한

개씩 생산하여 얻은 수 있는 이익을 각각 70원, 120원, 170원이라 할 때, 이 공장에서 하루 동안 얻을 수 있는 최대 이익을 구하여라.

	P	Q	R
A	4	3	4
B	5	7	5
C	6	9	10
공급량	400	450	500

7. 게임을 만드는 회사가 이번에 제작한 온라인게임을 TV, 일간지, 라디오 및 모바일의 네 개 매체에 광고하려고 한다. 각 매체에 광고하기 위해서는 광고예산과 기획비용이 필요한데, 각 매체별 1회 광고예산과 기획비용 그리고 각 매체별로 1회 광고할 때의 시청자 수는 다음 표와 같다. 사용가능한 광고예산은 5억원이고 기획비용은 1억원이며 일간지 광고는 3회 이하로, 모바일 광고는 4회 이상으로 하고자 한다. 시청자 수를 최대로 하기 위해서 각 매체별 광고회수를 얼마로 하여야 할까?

	TV	라디오	일간지	모바일	사용 가능한 금액
광고예산	50	20	10	30	500
기획비용	20	8	3	10	100
시청자 수	210	15	5	320	

제 13 장

쌍대문제와 2인 제로섬 게임

지난 몇개의 장을 통하여 심플렉스 표를 이용하여 선형계획법 문제를 푸는 방법을 알아 보았다. 여기에서는 쌍대문제와 그들의 심플렉스 표를 이용한 풀이에 대하여 알아본다. 또 쌍대문제의 최적값은 같은 값이라는 주장에 대하여 알아보고 이 주장이 2인 제로섬 게임에 대해 알려주는 바를 알아본다.

13.1 쌍대문제와 심플렉스 표

심플렉스 표를 이용하여서 쌍대문제를 한꺼번에 풀 수 있다.[1)]

보기 13.1. 보기 5.4 에서 살펴보았던, 다음의 왼쪽 문제와 오른쪽 문제는 서로 쌍대문제인데, 심플렉스 표를 이용하여 최소값과 최대값을 각각 구하여 보자.

$$\mathit{min}\left(\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \qquad \mathit{max}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \geq 0 \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

왼쪽의 최소값 문제와 오른쪽의 최대값 문제의 심플렉스 표는 다음과 같다:

	s_1	s_2	v
y_1	1	$\boxed{2}$	4
y_2	4	2	12
y_3	-1	1	1
1	-1	-1	0

	x_1	x_2	-1
$-u_1$	1	$\boxed{2}$	4
$-u_2$	4	2	12
$-u_3$	-1	1	1
$-v$	-1	-1	0

각각의 표에서 $\boxed{2}$ 를 기준으로 *pivot* 하면 다음 표들을 얻는다:

1) 앞에서 최소값 문제와 최대값 문제의 표를 만드는 과정을 돌아 보면, 최대값 문제의 표를 만드는 과정이, 최소값 문제의 경우와는 달리 어딘가 순탄하지 않았다고 하겠는데, 그 까닭은 쌍대문제를 한꺼번에 풀려는 때문이라고 하겠다.

	s_1	y_1	
s_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
y_2	$\boxed{3}$	-1	8
y_3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2

	x_1	u_1	-1
$-x_2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
$-u_2$	$\boxed{3}$	-1	8
$-u_3$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3
	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2

각각의 표에서 $\boxed{3}$ 을 기준으로 다시 한번 *pivot* 하면 다음 표들을 얻는다:

	y_2	y_1	
s_2			$\frac{2}{3}$
s_1			$\frac{8}{3}$
y_3			$\frac{13}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

	u_2	u_1	-1
$-x_2$			$\frac{2}{3}$
$-x_1$			$\frac{8}{3}$
$-u_3$			$\frac{13}{3}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

이들 표로부터, 최소값 문제와 최대값 문제의 다음과 같은 풀이를 얻는다:

- 왼쪽의 최소값 표에서 아래> 0 이고 오른> 0 이므로 구하는 최소값은 $\frac{10}{3}$ 이고 최소값을 갖게끔하는 점은,

  $$\text{왼} = 0, \quad \text{위} = \text{아래}$$

  로부터

  $$s_1 = 0,\ s_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_2 = \frac{1}{6},\ y_1 = \frac{1}{3}$$

  임을 안다. 여기에서 진짜 변수 y_1, y_2, y_3 만을 골라내면 최소값을 갖게끔하는 꼭지점의 좌표는

  $$(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0\right)$$

  이다.

- 오른쪽의 최대값 표에서 아래> 0 이고 오른> 0 이므로 구하는 최대값은 $\frac{10}{3}$ 이고 최대값을 갖게끔하는 점은,

  $$\text{위} = 0, \quad -\text{왼} = \text{오른}$$

  로부터

  $$u_1 = 0,\ u_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_1 = \frac{8}{3},\ u_3 = \frac{13}{3}$$

임을 안다. 여기에서 진짜 변수 x_1, x_2 만을 골라내면 최대값을 갖게끔하는 꼭지점의 좌표는

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

이다.

보기의 처음의 두개의 표에서, 왼쪽 아래의 귀퉁이, 오른쪽 위의 귀퉁이와 슬랙변수 들을 없애면

y_1	1	2	4
y_2	4	2	12
y_3	-1	1	1
	-1	-1	0

	x_1	x_2	
	1	2	4
	4	2	12
	-1	1	1
	-1	-1	0

을 얻고, 이제 이들을 하나의 표로 합체하여 다음 표를 얻는다.

	x_1	x_2	
y_1	1	2	4
y_2	4	2	12
y_3	-1	1	1
	-1	-1	0

보기의 풀이에서, 예를 들어서 처음에 $\boxed{2}$ 를 기준으로 pivot 할 때, 최소값 표에서는 y_1 과 s_2 가 서로 자리를 바꾸었는데, 최대값 표에서는 x_2 와 $-u_1$ 이 아니라 x_2 와 u_1 이 자리를 바꾼다. 이처럼 최소값 표와 최대값 표에서의 pivot 규칙이 조금 다르지만, 잠시 이를 무시하고 다음처럼 앞의 표를 바꾸어 보자.

	x_1	x_2	
y_1	1	$\boxed{2}$	4
y_2	4	2	12
y_3	-1	1	1
	-1	-1	0

$\Rightarrow$

	x_1	y_1	
x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
y_2	$\boxed{3}$	-1	8
y_3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2

$\Rightarrow$

	y_2	y_1	
x_2			$\frac{2}{3}$
x_1			$\frac{8}{3}$
y_3			$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

그리고 최적값과 최적값을 갖게끔하는 꼭지점의 좌표를 찾는 다음과 같은 규칙을 생각해보자.

- 표가
$$\text{아래} \geq 0, \quad \text{오른} \geq 0$$
일 때, 오른쪽 아래 귀퉁이의 값이 최적값이다.
- 이때, 최소값 문제에서의 최적값을 갖게끔하는 점의 y 좌표는 다음과 같다:
표의 왼쪽에 있는 y_i 의 값은 0 이고 표의 위에 있는 y_i 의 값은 표의 아래의 값이다.
- 이때, 최대값 문제에서의 최적값을 갖게끔하는 점의 x 좌표는 다음과 같다:
표의 위에 있는 x_i 의 값은 0 이고 표의 왼쪽에 있는 x_i 의 값은 표의 오른쪽의 값이다.

이 규칙을 적용한다면, 다시 한 번 보기의 풀이를 얻을 수 있음을 알 수 있을 것이다. 나중의 풀이는 쌍대문제를 한꺼번에 해결하였다는 장점이 있다.

다음 두개의 문제 $(\flat), (\sharp)$ 를 서로의 쌍대문제라고 부른다고 하였는데,

$(\flat)$ 제약조건 $\mathbf{y}^T A \geq \mathbf{c}^T, \mathbf{y} \geq 0$ 일 때 함수 $\mathbf{y}^T\mathbf{b}$ 의 최소값을 구하는 문제

$(\sharp)$ 제약조건이 $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$ 일 때 함수 $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ 의 최대값을 구하는 문제

앞의 설명으로부터 알 수 있듯이, 이 두 문제는 다음과 같은 동일한 심플렉스 표

	$\mathbf{x}^T$	
$\mathbf{y}$	A	$\mathbf{b}$
	$-\mathbf{c}^T$	0

로 나타내어질 뿐만 아니라 이 표를 바꿀 때 똑같은 pivot 규칙을 따르게 된다.

보기 13.2. 다음 최대값 문제 $(\sharp)$와 최소값 문제 $(\flat)$은 서로 쌍대문제이다:

(♯) 제약조건은

$$\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 \le 24,$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 60$$

이고 최대값을 구하려는 목적함수는

$$6x_1 + 14x_2 + 13x_3.$$

(♭) 제약조건은

$$\frac{1}{2}y_1 + y_2 \ge 6,$$
$$2y_1 + y_2 \ge 14,$$
$$y_1 + 4y_2 \ge 13$$

이고 최소값을 구하려는 목적함수는

$$24y_1 + 60y_2.$$

이 문제들을 행렬로 나타내면 다음과 같다:

$$\mathit{max}\left(\begin{bmatrix} 6 & 14 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) \qquad \Bigg| \qquad \mathit{min}\left(\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 24 \\ 60 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 24 \\ 60 \end{bmatrix} \qquad \Bigg| \qquad \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 13 \end{bmatrix}$$

그래서 이 쌍대문제의 심플렉스 표는 다음과 같다:

	x_1	x_2	x_3	
y_1	$\frac{1}{2}$	2	1	24
y_2	1	2	4	60
	-6	-14	-13	0

다음과 같이 표를 바꾸어 나가면

	x_1	x_2	x_3	
y_1	$\frac{1}{2}$	2	1	24
y_2	$\boxed{1}$	2	4	60
	-6	-14	-13	0

$\Rightarrow$

	y_2	x_2	x_3	
y_1	$-\frac{1}{2}$	1	$\boxed{-1}$	-6
x_1	1	2	4	60
	6	-2	11	360

$\Rightarrow$

	y_2	x_2	y_1	
x_3				6
x_1				36
	$\frac{1}{2}$	9	11	294

그래서

- $x_1 = 36, x_2 = 0, x_3 = 6$ 일 때, 최대값은 $6 \cdot 36 + 14 \cdot 0 + 13 \cdot 6 = 294.$
- $y_1 = 11, y_2 = \frac{1}{2}$ 일 때, 최소값은 $24 \cdot 11 + 60 \cdot \frac{1}{2} = 294.$

13.2 쌍대성 원리

다음을 쌍대성 원리라고 부른다.

정리 13.2.1. 다음 쌍대문제에 대하여

(♭) 제약조건 $\boldsymbol{y}^T A \geq \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{y} \geq 0$ 일 때 함수 $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b}$ 의 최소값을 구하는 문제

(♯) 제약조건이 $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0$ 일 때 함수 $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$ 의 최대값을 구하는 문제

(1) 처음의 문제 또는 이의 쌍대문제가 최적해[2]를 가지면 나머지 문제도 자동적으로 최적해를 가지며 두 최적해에 대한 최적값[3]이 같다.[4] 즉,

$$\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} \text{의 최소값} = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}\text{의 최대값}.$$

(2) 둘 다 최적해를 갖지 못하는 경우는 다음 둘 중의 한 경우에 해당된다:

(*i*) 두 문제의 가능영역이 모두 공집합이다.

(*ii*) 한 문제의 가능영역은 공집합이고 나머지 문제는 최대값이 $+\infty$ 이거나 최소값이 $-\infty$ 이다. [5]

(1)의 경우는 심플렉스 표에서

$$\text{아래} \geq 0, \quad \text{오른} \geq 0$$

이도록 하는 것이 가능한 경우이고, 쌍대문제는 같은 심플렉스 표를 가지며 같은 pivot 규칙이 적용되므로 아래≥ 0, 오른≥ 0 이도록 표를 완성했을 때에는 오른쪽 아래 귀퉁이의 값이 같아짐을 안다.[6] 따라서 (1)의 경우는 증명이 된 것이다.

2) 최소값을 구하는 문제에서는 최소값을 갖게끔 하는 점이고, 최대값을 구하는 문제에서는 최대값을 갖게끔 하는 점을 말한다

3) 최소값 또는 최대값

4) 이 원리를 비타민을 놓고 경쟁하던 영양사와 제약회사의 입장에서 본다면, (만일 영양사와 비타민 회사가 모두 똑똑하다면) 그 결과는 항상 무승부가 된다는 것이다.

5) 그러므로 이 정리가 주장하는 바를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다: 두 문제의 가능영역이 모두 공집합이 아니면 (1)이 성립하고, 한 문제의 가능영역 만이 공집합이면 (2)의 (ii)가 성립한다. 보기 10.5과 보기 12.5가 이 경우의 보기가 되겠다.

6) 보기 **??**과 보기 **??**가 이 경우의 보기이다.

이제 (2)의 (i)은 증명할 것이 없고, (ii)를 증명하기 위해 먼저 다음 도움정리를 증명하자:

도움정리 13.2.2. y 는 최소값 문제 ($\flat$) 의 가능영역의 벡터, x 는 최대값 문제 ($\sharp$) 의 가능영역의 벡터라고 하면 다음 부등식이 성립한다.[7)]

$$c^T x \le y^T b.$$

[도움정리의 증명] 먼저 $\mathbf{x}$ 와 $\mathbf{y}$ 각각이 각각의 문제의 가능영역에 있으므로

$$\mathbf{y}^T A \ge \mathbf{c}^T, \quad A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$$

이 성립함을 안다. 그런데 $\mathbf{x} \ge 0$ 이므로

$$\mathbf{y}^T A \ge \mathbf{c}^T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}^T A\mathbf{x} \ge \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

이 성립하고, 또 $\mathbf{y} \ge 0$ 이므로

$$A\mathbf{x} \le \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}^T A\mathbf{x} \le \mathbf{y}^T\mathbf{b}$$

가 성립한다. 위의 두 식을 합치면

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \le \mathbf{y}^T A\mathbf{x} \le \mathbf{y}^T\mathbf{b}$$

이고 그러므로

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \le \mathbf{y}^T\mathbf{b}$$

가 성립한다. ■

이 부등식 때문에 쌍대성 원리의 (2)에서 최소값 문제의 최소값이 $-\infty$ 가 되면서 그의 쌍대문제인 최대값 문제의 최대값이 $+\infty$ 가 되는 경우는 있을 수가 없음을 알 수 있다. 이로서 쌍대성 원리의 증명이 끝난다.[8)] ■

보기 10.5 와 보기 12.5 이 정리의 (2)의 (ii)의 예이다.

---

7) 이 보조정리를 약쌍대성 부등식이라고 부른다.

8) 예를 들어서, 최소값 문제에서 가능한 경우는 다음 세가지 뿐이다.

(i) 가능영역이 공집합인 경우

(ii) 가능영역이 공집합이 아니며 이때 최소값을 갖는 경우

(iii) 가능영역이 공집합이 아닌데, 최소값이 없는 경우, 다시 말하면 최소값이 $-\infty$ 인 경우

그러면, 이제 위의 도움정리의 부등식에서 만일 등식이 성립하게 되면 어떻게 되는지 알아 보자.

도움정리의 부등식이 알려 주는 것은, 임의의 가능벡터 $\mathbf{y}$ 에 대하여 $\mathbf{y}^T\mathbf{b}$ 가 $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ 보다 작을 수는 없다는 것이다. 그런데 등식이 성립한다면 특별한 $\mathbf{y}$ 에 대하여 이 값을 가지므로 $\mathbf{y}$ 는 최적해이다. 즉, 이 값이 최소값이다. 마찬가지로 임의의 가능벡터 $\mathbf{x}$ 에 대하여 $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ 가 $\mathbf{y}^T\mathbf{b}$ 보다 클 수가 없는데, 이 하한값 $\mathbf{y}^T\mathbf{b}$ 를 갖게 하는 $\mathbf{x}$ 도 당연히 최적해이다. 즉, 이 값이 최대값이다. 그러므로 다음이 성립함을 알 수 있다:

정리 13.2.3. 각각의 가능영역의 벡터들 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 에 대하여

$$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

가 성립하면, $\boldsymbol{x}$ 와 $\boldsymbol{y}$ 는 모두 최적해이다. ■

13.3 2인 제로섬 게임

쌍대성 원리를 2인 제로섬 게임에 적용할 수가 있는데, 이를 위하여 지불행렬 A 가 나타내는 2인 게임에 대하여, 열식이와 행순이의 생각을 따로따로 살펴보자.

- 열식이는 다음과 같이 생각할 것이다: 내(열식이)가 전략 $\mathbf{x}$ 를 선택한다고 가정하자. 이에 대하여 똘똘한 행순이는 전략 $\mathbf{y}$ 를 선택하되 $\mathbf{y}^T A\mathbf{x}$가 가장 커지도록 선택할 것이고 그래서 이때의 기대값은

$$\max_{\mathbf{y}} \mathbf{y}^T A\mathbf{x}$$

  이다. 그러므로 나(열식이)는 이 최대값을 최소화하려는 전략 $\mathbf{x}^*$ 를 선택하여야 할 것이다. 그러면 이때의 기대값은

$$\max_{\mathbf{y}} \mathbf{y}^T A\mathbf{x}^* = \min_{\mathbf{x}} \max_{\mathbf{y}} \mathbf{y}^T A\mathbf{x}$$

  이다. 이것이 내(열식이)가 기대할 수 있는 최선의 결과이다.

- 행순이는 다음과 같이 생각할 것이다: 내(행순이)가 전략 $\mathbf{y}$ 를 선택한다면, 똑똑한 열식이는 전략 $\mathbf{x}$를 선택하되, $\mathbf{y}^T A\mathbf{x}$가 최소가 되도록 선택할 것이고 그래서 이때의 기대값은

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{y}^T A\mathbf{x}$$

  이다. 그러므로 나(행순이)는 결국 이 최소값 $\min_{\mathbf{x}} \mathbf{y}^T A\mathbf{x}$가 최대가 되도록 하는 전략 $\mathbf{y}^*$ 를 선택하여야 할 것이다. 그러면 이때의 기대값은

$$\min_{\mathbf{x}} y^{*T} A\mathbf{x} = \max_{\mathbf{y}} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{y}^T A\mathbf{x}$$

  이다. 이것이 내(행순이)가 기대할 수 있는 최선의 결과이다.

그러므로, 지불행렬이 A 인 게임에 대하여 다음을 알 수 있다.

- 열식이가 기대하는 최선의 결과와 최선의 전략 $\mathbf{x}^*$.

$$\max_{\mathbf{y}} \mathbf{y}^T A\mathbf{x}^* = \min_{\mathbf{x}} \max_{\mathbf{y}} \mathbf{y}^T A\mathbf{x}$$

- 행순이가 기대하는 최선의 결과와 최선의 전략 $\mathbf{y}^*$.

$$\min_{\mathbf{x}} y^{*T} A\mathbf{x} = \max_{\mathbf{y}} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{y}^T A\mathbf{x}$$

열식이는 최대값 들 중에서 최소값을 구하고 있고, 행순이는 최소값 들 중에서 최대값을 구하고 있다. 이처럼 게임을 할 때, 행순이와 열식이의 이해가 서로 상충되고 그러므로 행순이가 풀려는 문제와 열식이가 풀려는 문제는 심정적으로 쌍대문제와 비슷하다고 느낄 수 있겠다. 이제 2인 제로섬게임에 대하여 다음이 성립한다. 이 책의 최종 목적지에 거의 다 왔다.

정리 13.3.1. 지불행렬이 A 인 2 인 게임에 대하여 다음이 성립한다.[9)]

$$\max_{\boldsymbol{y}\geq 0}\min_{\boldsymbol{x}\geq 0} \boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x} = \min_{\boldsymbol{x}\geq 0}\max_{\boldsymbol{y}\geq 0} \boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}.$$

이 정리가 주장하는 것은

- 행순이와 열식이가 기대할 수 있는 최선의 결과는 같고,
- 그 최선의 결과는 이미 게임에 의하여 결정되어 있다는 것이다.

최선의 결과인 공통의 값을 게임의 가치라고 부른다고 하였었다.

[정리의 증명] 지불행렬의 각 원소에 적당한 크기의 같은 양수를 더하여 지불행렬 A 의 모든 원소가 양이라고 가정하여도 될 것이다. 이제 A 가 $m \times n$ 행렬이면 $\mathbf{b}$ 는 각 성분이 1 인 n 차원 벡터, $\mathbf{c}$ 는 각 성분이 1 인 m 차원 벡터라고 하자.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

그리고 다음과 같은 서로 쌍대인 선형계획 문제를 생각하자:

($\flat$) $\mathbf{y}^T A \geq \mathbf{c}^T,\ \mathbf{y} \geq 0$ 일 때, $\mathbf{y}^T\mathbf{b}$ 의 최소값 구하기.

($\sharp$) $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0$ 일 때, $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ 의 최대값 구하기.

지불행렬이 A 인 게임에 대하여 이러한 선형계획법 문제를 생각하겠다는 것이다. 이제 행렬 A 의 모든 원소가 양수이므로, 각 성분이 매우 큰 양수로 이루어진 m 차원

9) John von Neumann 이 처음으로 증명했다고 한다. John von Neumann (1903-1957)은 헝가리 출신으로 미국에서 활동한 수학자로서 양자역학, 함수해석학, 집합론, 컴퓨터과학, 게임이론, 경제학, 통계학 등 여러 분야에 걸쳐서 다양한 업적을 남겼다.

벡터는 문제 (♭)의 제약조건을 만족할 것이고 따라서 문제 (♭)의 가능영역이 공집합이 아니고 또 영벡터는 문제 (♯)의 제약조건을 만족하므로 문제 (♯)의 가능영역도 공집합이 아니다. 그러므로 쌍대성원리로부터 두 문제의 최적해

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_m \end{bmatrix}$$

가 존재하고 이때

$$\tilde{\mathbf{y}}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}}$$

가 성립한다. 이 공통의 값을 $\frac{1}{\theta}$ 라고 하자. 즉,

$$\tilde{\mathbf{y}}^T\mathbf{b} = \frac{1}{\theta} = \mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}},$$

$$\tilde{y}_1 + \cdots + \tilde{y}_m = \frac{1}{\theta} = \tilde{x}_1 + \cdots + \tilde{x}_n.$$

이제, 이 식으로부터

$$\mathbf{y}^* = \theta\,\tilde{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x}^* = \theta\,\tilde{\mathbf{y}}$$

은, 각각의 성분이 ≥ 0 이고 또 성분의 합이 1 이므로 각각 행순이와 열식이의 전략이 됨을 안다.

이제 $\tilde{\mathbf{y}}$ 는 가능영역에 속하므로 $\tilde{\mathbf{y}}^T A \geq \mathbf{c}^T$ 이고 따라서

$$\mathbf{y}^{*T}A = (\theta\,\tilde{\mathbf{y}})^T A = \theta(\tilde{\mathbf{y}}^T A) \geq \theta\,\mathbf{c}^T$$

이므로 열식이의 임의의 전략 $\mathbf{x}$ 에 대해

$$\mathbf{y}^{*T}A\mathbf{x} \geq \theta\,\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \theta(x_1 + \cdots + x_n) = \theta$$

가 성립한다.[10)] 그러므로

$$\min_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}^{*T}A\mathbf{x}) \geq \theta \tag{13.3.1}$$

도 성립한다. 이 식이 알려주는 것은, 행순이가 전략 $\mathbf{y}^*$ 를 사용하면 게임의 결과값이 작으면 작을 수록 좋은 열식이가 기대할 수 있는 값은 θ 보다 작을 수는 없다는 것이다.

한편, 마찬가지로

$$A\mathbf{x}^* = A(\theta\,\tilde{\mathbf{x}}) = \theta\,(A\tilde{\mathbf{x}}) \leq \theta\,\mathbf{b}$$

10) 전략 $\mathbf{x}$ 는 각 성분이 ≥ 0 인 벡터이므로.

이므로 행순이의 임의의 전략 $\mathbf{y}$ 에 대해

$$\mathbf{y}^T A\mathbf{x}^* \le \mathbf{y}^T(\theta\,\mathbf{b}) = \theta\,(\mathbf{y}^T\mathbf{b}) = \theta\,(y_1 + \cdots + y_m) = \theta$$

가 성립하고[11] 따라서

$$\max_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}^T A\mathbf{x}^*) \le \theta \tag{13.3.2}$$

가 성립한다. 이 식이 알려주는 것은, 열식이가 전략 $\mathbf{x}^*$ 를 사용하면 게임의 결과값이 크면 클수록 좋은 행순이가 기대할 수 있는 값은 θ 보다 클 수는 없다는 것이다.

이제, 행순이는 전략 $\mathbf{y}^*$ 를 사용하고 열식이는 전략 $\mathbf{x}^*$ 를 사용하면 어떻게 되는지 살펴보자.

먼저 (13.3.1)로부터

$$\mathbf{y}^{*T} A\mathbf{x}^* \ge \min_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}^{*T} A\mathbf{x}) \ge \theta$$

이고[12] 또 (13.3.2)로부터

$$\mathbf{y}^{*T} A\mathbf{x}^* \le \max_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}^T A\mathbf{x}^*) \le \theta$$

이므로[13] 두 식을 합치면

$$\mathbf{y}^{*T} A\mathbf{x}^* = \theta$$

가 성립한다. 다시 말하면, 행순이는 전략 $\mathbf{y}^*$ 를 사용하고 열식이는 전략 $\mathbf{x}^*$ 를 사용하면 행순이와 열식이 모두 기대할 수 있는 최선의 결과를 얻을 수 있다는 것이다. 즉, 정리에서 주장하는

$$\max_{\mathbf{y}\ge 0}\min_{\mathbf{x}\ge 0}\ \mathbf{y}^T A\mathbf{x} = \theta = \min_{\mathbf{x}\ge 0}\max_{\mathbf{y}\ge 0}\ \mathbf{y}^T A\mathbf{x}$$

이 성립한다는 것이다. 더불어서 이 게임의 가치는 θ 임도 안다. ■

평범하지 않은 결과이다. 2인 제로섬 게임은 선형계획법 문제라는 것이다. 어쨌든 이 증명의 과정을 따라가면 2인 제로섬 게임을 풀 수 있음을 알 수 있다.

보기 13.3. 보기 3.2 을 앞의 정리를 증명한 방법으로 풀어 보자. 앞의 증명에서 지불행렬의 성분이 모두 ≥ 0 가 되도록 조작을 했었는데, 사실 이것은 두 쌍대문제의

11) 전략 $\mathbf{y}$ 는 각 성분이 ≥ 0 인 벡터이므로.
12) 최소값보다 더 작을 수는 없다
13) 최대값보다 더 클 수는 없다.

가능영역의 모두 공집합이 아니어서 두 쌍대문제의 최적해가 존재하도록 하기 위한 때문이었다. 최적해의 존재는 쌍대정리가 말해 준다. 가능영역이 모두 공집합이 아님을 안다면 이 과정은 필요없겠다. 그래서 이 과정을 생략하고, 정리의 증명과정을 따라서 보기 3.2 의 게임을 풀어보면 그 과정은 다음과 같다.

$$
\begin{array}{|c|cc|c|}
\hline
 & x_1 & x_2 & \\
\hline
y_1 & -1 & 3 & 1 \\
y_2 & \boxed{2} & 0 & 1 \\
\hline
 & -1 & -1 & 0 \\
\hline
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{|c|cc|c|}
\hline
 & y_2 & x_2 & \\
\hline
y_1 & \frac{1}{2} & \boxed{3} & \frac{2}{3} \\
x_1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
\hline
 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\
\hline
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{|c|cc|c|}
\hline
 & y_2 & y_1 & \\
\hline
x_2 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\
x_1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
\hline
 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

그래서 행순이의 최선의 전략은 $(y_1, y_2) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 이고 열식이의 최선의 전략은 $(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 이며 이 게임의 가치는 1 이다.

보기 13.4. 지불행렬이 다음과 같은 게임을 풀어 보자.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

먼저, 행렬의 원소가 모두 > 0 이도록 (예를 들면) 각 원소에 2 를 더하여 새로운 지불행렬을 만든다.

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

이제, 정리의 증명 과정에서와 같이, 다음 표로 주어지는 쌍대문제를 생각한다:

	x_1	x_2	x_3	
y_1	5	1	2	1
y_2	4	6	3	1
y_3	3	4	5	1
	-1	-1	-1	0

이제, 다음과 같이 표를 바꾸어 나가서 ”아래”> 0 ”오른”> 0 이 되도록 한다:

$$
\begin{array}{|c|ccc|c|}
\hline
 & x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
y_1 & \boxed{5} & 1 & 2 & 1 \\
y_2 & 4 & 6 & 3 & 1 \\
y_3 & 3 & 4 & 5 & 1 \\
\hline
 & -1 & -1 & -1 & 0 \\
\hline
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{|c|ccc|c|}
\hline
 & y_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
x_1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\
y_2 & -\frac{4}{5} & \boxed{\frac{26}{5}} & \frac{7}{5} & \frac{1}{5} \\
y_3 & -\frac{3}{5} & \frac{17}{5} & \frac{19}{5} & \frac{2}{5} \\
\hline
 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{array}{|c|ccc|c|}
\hline
 & y_1 & y_2 & x_3 & \\
\hline
x_1 & \frac{3}{13} & -\frac{1}{26} & \frac{9}{26} & \frac{5}{26} \\
x_2 & -\frac{2}{13} & \frac{5}{26} & \frac{7}{26} & \frac{1}{26} \\
y_3 & -\frac{1}{13} & -\frac{17}{26} & \boxed{\frac{75}{26}} & \frac{7}{26} \\
\hline
 & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\
\hline
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{|c|ccc|c|}
\hline
 & y_1 & y_2 & y_3 & \\
\hline
x_1 & & & & \frac{4}{25} \\
x_2 & & & & \frac{1}{75} \\
x_3 & & & & \frac{7}{75} \\
\hline
 & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\
\hline
\end{array}
$$

그러므로 쌍대문제의 최적값은 $\frac{1}{\theta} := \frac{4}{15}$ 이고, 최적해는 각각

$$
\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \end{bmatrix},
$$
$$
\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{25} & \frac{1}{75} & \frac{7}{75} \end{bmatrix}
$$

이다. 그러므로 지불행렬이 A 인 게임의 가치는

$$
\theta = \frac{15}{4}
$$

이고, 애당초에 주어진 게임의 가치는

$$
\frac{15}{4} - 2 = \frac{7}{4}
$$

이다. 또한, 행순이와 열식이의 최선의 전략은

$$
\theta \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},
$$
$$
\theta \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{20} & \frac{7}{20} \end{bmatrix}
$$

이다.

보기 13.5. 지불행렬이 다음과 같은 게임을 풀어 보자.

$$
\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}.
$$

먼저 각 원소에 4 를 더하여서 성분이 모두 양수가 되도록 한다:

$$A := \begin{bmatrix} 6 & 1 & 5 & 9 \\ 5 & 8 & 7 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

제약벡터는 각각의 성분이 1 인 벡터이며 행렬 A 를 공유하는 쌍대문제를 만들고 푼다:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
y_1	$\boxed{6}$	1	5	9	1
y_2	5	8	7	3	1
y_3	6	4	2	8	1
	-1	-1	-1	-1	0

$\Rightarrow$

	y_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{6}$
y_2	$-\frac{5}{6}$	$\frac{43}{6}$	$\frac{17}{6}$	$-\frac{9}{2}$	$\frac{1}{6}$
y_3	-1	$\boxed{3}$	-3	-1	0
	$\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$\Rightarrow$

	y_1	y_3	x_3	x_4	
x_1	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{18}$	1	$\frac{14}{9}$	$\frac{1}{6}$
y_2	$\frac{14}{9}$	$-\frac{43}{18}$	$\boxed{10}$	$-\frac{19}{9}$	$\frac{1}{6}$
x_2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	0
	$-\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$	-1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$

$\Rightarrow$

	y_1	y_3	y_2	x_4	
x_1					$\frac{3}{20}$
x_3					$\frac{1}{60}$
x_2					$\frac{1}{60}$
	$\frac{2}{45}$	$\frac{7}{180}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{11}{60}$

쌍대문제의 최적값은 $\frac{1}{\theta} := \frac{11}{60}$ 이고 최적해는 각각

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{45} & \frac{1}{10} & \frac{7}{180} \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{20} & \frac{1}{60} & \frac{1}{60} & 0 \end{bmatrix}$$

이다. 그러므로 지불행렬이 A 인 게임의 가치는

$$\theta = \frac{60}{11}$$

이고, 애당초에 주어진 게임의 가치는

$$\frac{60}{11} - 4 = \frac{16}{11}$$

이다. 또한, 행순이와 열식이의 최선의 전략은

$$\theta \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{33} & \frac{6}{11} & \frac{7}{33} \end{bmatrix},$$
$$\theta \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & 0 \end{bmatrix}$$

이다.

연습문제

1. 제약조건이
$$\begin{aligned} y_1+y_2+y_3 &\ge 6, \\ y_1-5y_2-y_3 &\ge 4, \\ y_1+5y_2+y_3 &\ge 24, \\ y_1,y_2,y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$
이고 최소값을 구하려는 목적함수는
$$3y_1+6x_2+y_3$$
인 문제의 쌍대문제를 구하고, 각각의 최적해를 구하여라.
2. 다음의 문제 ($\flat$) 과 ($\sharp$) 가 쌍대문제가 되도록 a,b,c,d,e 를 정하여라.
   ($\flat$) $\min(3y_1+2y_2+4y_3)$, $\quad y_1+2y_2+3y_3 \ge 1$, $\quad 2y_1+3y_2+y_3 \le -1$.
   ($\sharp$) $\max(ax_1+bx_2)$, $\quad x_1-2x_2 \le c$, $\quad -2x_1+dx_2 \ge -2$, $\quad 3x_1-x_2 \le e$.
3. 지불행렬이 다음과 같은 게임을 풀어라.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

4. 다음 값을 구하여라.

   a) $\min_{y_i \geq 0,\ y_1+y_2=1} \max_{x_i \geq 0,\ x_1+x_2=1}(x_1y_1 + x_2y_2)$.

   b) $\max_{y_i \geq 0,\ y_1+y_2=1} \min_{x_i \geq 0,\ x_1+x_2=1}(x_1y_1 - 2x_1y_2 - x_2y_1)$.

제 14 장

2인 제로섬 게임의 또다른 풀이

표준형이 아닌, 일반적인 선형계획법 문제를 살펴보고, 그러한 문제의 풀이를 이용하여 2인 제로섬 게임을 다시 풀어 본다.

14.1 표준형이 아닌 선형계획법 문제

다음과 같은 최소값 문제를 보자. 이 문제를 "문제 ♭"이라고 하겠다.

- 목적함수 $5y_1 + 6y_2 + 7s$.
- 제약조건

$$\begin{aligned} 3y_1 + 2y_2 + s &\geq 3, \\ -y_1 + 4y_2 + 2s &\geq 4, \\ ay_1 + by_2 + cs &= 8, \\ y_1, y_2 &\geq 0, \quad -\infty < s < \infty. \end{aligned}$$

이 문제는

1. 변수 s 가 양수값이어야 한다는 제한이 없고
2. 부등식이 아니라
$$ay_1 + by_2 + cs = 8$$
와 같이, 등식으로 제한조건이 주어져 있어서

표준형 문제가 아닌데, 다음과 같은 방법으로 이러한 문제들을 표준형 문제로 바꿀 수 있다:

- 양의 값을 가져야한다는 제약조건이 없는 변수는 다음과 같이 양의 값을 갖는 새로운 두 개의 변수의 차로 나타낸다.
$$s = y_3^+ - y_3^-, \quad y_3^+ \geq 0,\ y_3^- \geq 0$$
- 등식은 두 개의 부등식으로 바꾼다.
$$ay_1 + by_2 + cs = 8 \Rightarrow \begin{cases} ay_1 + by_2 + cs & \geq 8 \\ ay_1 + by_2 + cs & \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ay_1 + by_2 + cs & \geq 8 \\ -ay_1 - by_2 - cs & \geq -8 \end{cases}$$

그러면, 다음과 같은 표준형 문제로 바뀐다.

- 목적함수 $5y_1 + 6y_2 + 7y_3^+ - 7y_3^-$

- 제약조건

$$\begin{aligned} 3y_1 + 2y_2 + y_3^+ - y_3^- &\geq 3, \\ -y_1 + 4y_2 + 2y_3^+ - 2y_3^- &\geq 4, \\ ay_1 + by_2 + cy_3^+ - cy_3^- &\geq 8, \\ -ay_1 - by_2 - cy_3^+ + cy_3^- &\geq -8, \\ y_1, y_2, y_3^+, y_3^- &\geq 0. \end{aligned}$$

다시 말하면, 목적함수는

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3^+ & y_3^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix}$$

이고 제약조건은

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3^+ & y_3^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & a & -a \\ 2 & 4 & b & -b \\ 1 & 2 & c & -c \\ -1 & -2 & -c & c \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 & -8 \end{bmatrix},$$

$$y_1, y_2, y_3^+, y_3^- \geq 0$$

이다.

이제 이 문제의 쌍대문제를 생각해 보면, 행렬은 공유하고 목적벡터와 제약벡터가 서로 바뀌어야 하므로 최대값을 구하려는 목적함수는

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^+ \\ x_3^- \end{bmatrix}$$

이고 제약조건은

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & a & -a \\ 2 & 4 & b & -b \\ 1 & 2 & c & -c \\ -1 & -2 & -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^+ \\ x_3^- \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix},$$

$$x_1, x_2, x_3^+, x_3^- \ge 0$$

이다. 다시 말하면, 쌍대문제는 다음과 같은 표준형 최대값 문제이다.

- 목적함수 $3x_1 + 4x_2 + 8x_3^+ - 8x_3^-$
- 제약조건

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + ax_3^+ - ax_3^- &\le 5, \\ 2x_1 + 4x_2 + bx_3^+ - bx_3^- &\le 6, \\ x_1 + 2x_2 + cx_3^+ - cx_3^- &\le 7, \\ -x_1 - 2x_2 - cx_3^+ + cx_3^- &\le -7, \\ x_1, x_2, x_3^+, x_3^- &\ge 0. \end{aligned}$$

이제

$$t := x_3^+ - x_3^-$$

라고 하면, 새로운 변수 t 의 부호에는 제한이 없어지고 앞의 문제는 다음과 같은 표준형이 아닌 문제가 된다:

- 목적함수 $3x_1 + 4x_2 + 8t$
- 제약조건

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + at &\le 5, \\ 2x_1 + 4x_2 + bt &\le 6, \\ x_1 + 2x_2 + ct &= 7, \\ x_1, x_2 \ge 0, -\infty &< t < \infty. \end{aligned}$$

이 문제를 "문제 $\sharp$"라고 부르겠는데, 처음의, 표준형이 아닌 최소값 문제 "문제 $\flat$"의 쌍대문제라고 하면 좋을 것이다. 이와 같이, 표준형이 아닌, 일반형 쌍대문제도

제약조건에 대한 서로 같은 행렬을 공유하고, 목적벡터와 제약벡터가 되는 서로 마주 바뀌는 점에서는 표준형 문제에서의 경우와 같다.[1)] 다른 점은, 양의 조건이 없는 변수의 계수와 등식조건의 우변의 값이 서로 마주 바뀌는 것이다.

보기 14.1. 제약조건이 다음과 같을 때

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_4 &\le 6, \\ -7x_1 + 8x_2 + x_3 &\ge 7, \\ x_1 + x_2 + 4x_4 &= 12, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0,\ &-\infty < x_4 < \infty. \end{aligned}$$

목적함수

$$z = 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4$$

의 최대값을 구하는 문제의 쌍대문제를 구해 보자.

먼저, 두번째 제약조건에서 부등호의 방향을 제법하게 바꾸면, 제약조건은 다음과 같이 쓰인다.

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_4 &\le 6, \\ 7x_1 - 8x_2 - x_3 &\le -7, \\ x_1 + x_2 + 4x_4 &= 12, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0,\ &-\infty < x_4 < \infty. \end{aligned}$$

1) "문제 ♭"에서의 제약조건의 좌변들을 행렬로 쓴다면

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & a \\ 2 & 4 & b \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix}$$

일 것이고, "문제 ♯"에서의 제약조건의 좌변들을 행렬로 쓴다면

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & a \\ 2 & 4 & b \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ t \end{bmatrix}$$

일 것이다.

그러면 제약조건의 좌변은

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ 7 & -8 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

와 같으므로, 쌍대문제의 제약조건의 좌변은

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ 7 & -8 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

와 같이 쓰일 것이다. 한편, 처음 문제의 목적벡터는 $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 인데, 네번째 변수 x_4 에 대하여 양수 조건이 없다. 그러므로 쌍대문제의 제약조건 중에서 네번째 조건식이 등식으로 쓰인다. 그래서 쌍대문제의 제약조건 중의 일부를 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 4y_1 + 7y_2 + y_3 &\geq 3, \\ -y_1 - 8y_2 + y_3 &\geq -2, \\ -y_2 &\geq -1, \\ y_1 + 4y_3 &= 1 \end{aligned}$$

아직, 변수 y_1, y_2, y_3 에 대한 제약조건이 없는데, 처음 문제의 제약조건에서 마지막 제약조건이 등식으로 쓰여 있으므로, 변수 y_1, y_2, y_3 에 대한 제약조건는

$$y_1, y_2 \geq 0,\ -\infty < y_3 < \infty$$

이고, 처음 문제의 제약벡터가 $\begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 12 \end{bmatrix}$ 이므로 쌍대문제에서 최소값을 구하려는 목적함수는

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 12 \end{bmatrix} = 6y_1 - 7y_2 + 12y_3$$

이다.

보기 14.2. 다음의 두 문제는 서로 쌍대문제이다.

- 열식이가 최소값을 구하려는 목적함수는 μ 이고 제약조건은

$$\begin{aligned}
&\mu \ge 3y_1 - y_2,\\
&\mu \ge 2y_1 + 4y_2 + y_3,\\
&\mu \ge y_1 + 2y_2 + 3y_3,\\
&1 = y_1 + y_2 + y_3,\\
&\ y_1, y_2, y_3 \ge 0, \quad -\infty < \mu < \infty
\end{aligned}$$

- 행순이가 최대값을 구하려는 목적함수는 λ 이고 제약조건은

$$\begin{aligned}
&\lambda \le 3x_1 + 2x_2 + x_3,\\
&\lambda \le -x_1 + 4x_2 + 2x_3,\\
&\lambda \le x_2 + 3x_3,\\
&1 = x_1 + x_2 + x_3,\\
&\ x_1, x_2, x_3 \ge 0, \quad -\infty < \lambda < \infty
\end{aligned}$$

14.2 표준형이 아닌 문제의 심플렉스 표

앞의 보기 14.2 에서의 열식이의 최소값 문제에 대해서, 다음과 같이 슬랙변수를 도입하자:

$$\begin{aligned} s_1 &: = -3y_1 + y_2 + \mu, \\ s_2 &: = -2y_1 - 4y_2 - y_3 + \mu, \\ s_3 &: = -y_1 - 2y_2 - 3y_3 + \mu, \\ s_4 &: = y_1 + y_2 + y_3 - 1 \end{aligned}$$

그리고, 다음과 같은 표를 만든다. 이 표를 열식이의 최소값 문제의 심플렉스 표라고 부르겠다:

	s_1	s_2	s_3	s_4	
y_1	-3	-2	-1	1	0
y_2	1	-4	-2	1	0
y_3	0	-1	-3	1	0
μ	1	1	1	0	1
1	0	0	0	-1	0

이 표에서 $s_i, i = 1, 2, 3$ 이 있는 열이 나타내는 것은 최소값 문제의 표준형 심플렉스 표가 나타내는 것과 마찬가지이지만 s_4 가 있는 열이 나타내는 것은, 부등식 제약조건이 아니라 등식 제약조건

$$s_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

을 나타내고 있고, 마지막 열은 목적함수를 나타내는 열이다:

$$\mu = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \mu \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

현재, 양의 제약조건이 없는 변수 μ 가 있고 또 부등식 제약조건이 아닌 등식제약조건이 있는, 두 가지 결함이 있는 이 표를 제법하게 바꾸는 방법을 설명하겠는데, 먼저 등식제약 조건에 대하여 살펴 본다.

등식조건식

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

을

$$y_3 = 1 - y_1 - y_2$$

로 바꾸어서 y_3 에 대입하면, 열식이의 문제는 y_3 는 없는 식이 될 것이다. 이것을 표에서 나타낸다면 pivot 을 하여서 y_3 와 s_4 를 서로 바꾸고 나서 s_4 가 있는 행을 없애는 것과 같다.

	s_1	s_2	s_3	s_4	
y_1	-3	-2	-1	1	0
y_2	1	-4	-2	1	0
y_3	0	-1	3	$\boxed{1}$	0
μ	1	1	1	0	1
1	0	0	0	-1	0

$\Rightarrow$

	s_1	s_2	s_3	y_3	
y_1	-3	-1	2	-1	0
y_2	1	-3	1	-1	0
s_4	0	-1	-3	1	0
μ	1	1	1	0	1
1	0	-1	-3	1	0

$\Rightarrow$

	s_1	s_2	s_3	y_3	
y_1	-3	-1	2	-1	0
y_2	1	-3	1	-1	0
μ	1	1	1	0	1
1	0	-1	-3	1	0

이제, 부호 조건이 없는 변수 μ 에 대해서 알아보자.

현재의 표에서 적당히 pivot 하여 변수 μ 를 위로 보내면,

	s_1	s_2	s_3	y_3	
y_1	-3	-1	2	-1	0
y_2	1	-3	1	-1	0
μ	1	$\boxed{1}$	1	0	1
1	0	-1	-3	1	0

$\Rightarrow$

	s_1	μ	s_3	y_3	
y_1	-2		3	-1	1
y_2	4		4	-1	3
s_2	1		1	0	1
1	1		-2	1	1

인데, 우리가 표준형 문제에서 심플렉스 표를 바꾸어 나갈 때, 아래≥ 0 이도록 바꾸려 했던 까닭은, 표준형 문제에서의 제약조건이

$$\text{모든 변수} \geq 0$$

이었기 때문이다. 그런데, 변수 μ 에 대해서는 이러한 제약조건이 없으므로 μ 가 있는 열의 맨 아래의 부호에는 신경을 쓰지 않아도 된다. 이 말은 μ 가 있는 열은 표를 바꾸어 나가는 과정에서 아무런 상관이 없다는 것이고, 따라서 μ 가 있는 열을 표에서 아예 없애도 될 것이다.

	s_1	μ	s_3	y_3	
y_1	-2		3	-1	1
y_2	4		4	-1	3
s_2	1		1	0	1
1	1		-2	1	1

$\Rightarrow$

	s_1	s_3	y_3	
y_1	-2	3	-1	1
y_2	4	4	-1	3
s_2	1	1	0	1
1	1	-2	1	1

이처럼, 표준형 최소값 심플렉스 표를 얻기 위해서는 다음 과정을 거치면 된다.

- 적당히 pivot 을 하여서 등식 제약조건이 만드는 슬랙변수를 왼쪽으로 옮긴 다음 그것이 있는 행을 모두 표에서 없앤다. 이것은 등식으로 주어진 제약조건을, 한 변수에 대한 식으로 표시하여 다른 식에 대입하는 것과 동치이다.
- 부호에 대한 제약이 없는 변수는, 적당히 pivot 을 하여서 위쪽으로 옮긴 다음 그것이 있는 열을 표에서 없앤다.

이제, 마지막 표는 보통의 심플렉스 표가 되었다. 그래서 다음과 같이 표를 바꾸어 보자.

	s_1	s_3	y_3	
y_1	-2	$\boxed{3}$	-1	1
y_2	4	4	-1	3
s_2	1	1	0	1
1	1	-2	1	1

$\Rightarrow$

	s_1	y_1	y_3	
s_3	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
y_2	$\boxed{\frac{20}{3}}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
s_2	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$

	y_2	y_1	y_3	
$\Rightarrow$ s_3				$\frac{1}{2}$
s_1				$\frac{1}{4}$
s_2				$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{4}$

표에서 목적함수 μ 는 사라졌지만, 이 목적함수의 최소값은 표의 왼쪽 아래 귀퉁이의 값 $\frac{7}{4}$ 임을 이 표는 알려 준다.

이제 그러면 일반적인 최대값 문제에 대해서는 어떻게 하면 될 지 짐작이 갈 것이다. 간단히 정리하면 다음과 같겠다.

- 부호에 대한 제약이 없는 변수는, 적당히 pivot 을 하여서 왼쪽으로 옮긴 다음 그것이 있는 행을 표에서 없앤다.
- 적당히 pivot 을 하여서 등식 제약조건이 만드는 슬랙변수를 위쪽으로 옮긴 다음 그것이 있는 열을 모두 표에서 없앤다. 이것은 등식으로 주어진 제약조건을, 한 변수에 대한 식으로 표시하여 다른 식에 대입하는 것과 동치이다.

보기 14.3. 앞의 보기에서의 행순이의 최대값 문제를 심플렉스 표로 풀면 다음과 같겠다:

1. 먼저 심플렉스 표를 만든다.

	x_1	x_2	x_3	λ	-1
$-u_1$	-3	-2	-1	1	0
$-u_2$	1	-4	-2	1	0
$-u_3$	0	-1	-3	1	0
$-u_4$	1	1	1	0	1
	0	0	0	-1	0

2. 양의 제약이 없는 변수를 왼쪽으로 보내서 그 행을 없앤다.

	x_1	x_2	x_3	λ	-1
$-u_1$	-3	-2	-1	1	0
$-u_2$	1	-4	-2	1	0
$-u_3$	0	-1	-1	$\boxed{1}$	0
$-u_4$	1	1	1	0	1
	0	0	0	-1	0

$\Rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	u_3	-1
$-u_1$	-3	-1	2	-1	0
$-u_2$	1	-3	1	-1	0
$-\lambda$	0	-1	-3	1	0
$-u_4$	1	1	1	0	1
	0	-1	-3	1	0

$\Rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	u_3	-1
$-u_1$	-3	-1	2	-1	0
$-u_2$	1	-3	1	-1	0
$-u_4$	1	1	1	0	1
	0	-1	-3	1	0

3. 등식 제약조건이 만드는 슬랙변수를 위쪽으로 옮긴 다음 그것이 있는 열을 모두 표에서 없앤다.

	x_1	x_2	x_3	u_3	-1
$-u_1$	-3	-1	2	-1	0
$-u_2$	1	-3	1	-1	0
$-u_4$	1	$\boxed{1}$	1	0	1
	0	-1	-3	1	0

$\Rightarrow$

	x_1	u_4	x_3	u_3	-1
$-u_1$	-2		3	-1	1
$-u_2$	4		4	-1	3
$-x_2$	1		1	0	1
	1		-2	1	1

$\Rightarrow$

	x_1	x_3	u_3	-1
$-u_1$	-2	3	-1	1
$-u_2$	4	4	-1	3
$-x_2$	1	1	0	1
	1	-2	1	1

4. 이제 보통의 심플렉스 표가 되었으므로 심플렉스 표를 바꾸어 나간다.

	x_1	x_3	u_3	-1
$-u_1$	-2	$\boxed{3}$	-1	1
$-u_2$	4	4	-1	3
$-x_2$	1	1	0	1
	1	-2	1	1

$\Rightarrow$

	x_1	u_1	u_3	-1
$-x_3$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$-u_2$	$\boxed{\frac{20}{3}}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
$-x_2$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$

$\Rightarrow$

	u_2	u_1	u_3	-1
$-x_3$				$\frac{1}{2}$
$-x_1$				$\frac{1}{4}$
$-x_2$				$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{4}$

목적함수는 사라졌지만, 구하는 최대값은 왼쪽 귀퉁이의 값 $\frac{7}{4}$ 이다.

열식이와 행순이의 문제는 표준형이 아니지만 서로 쌍대문제이었는데, 보기의 풀이에서처럼 이러한 쌍대문제에 대해서도 서로의 최적값은 같다.

14.3 하나의 보기

지불행렬이

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

인 게임에서 행순이와 열식이의 최선의 전략을 생각해 보자.

열식이에게는 전략에 대한 기대값이 작을 수록 좋다. 만일 열식이가

$$1\text{열} : 2\text{열} : 3\text{열} = y_1 : y_2 : y_3, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

의 비율인 전략을 사용할 때, 이 전략에 대한 기대값을 μ 라고 하자. 최악의 경우는 이 값이

- 행순이의 순수전략 1행에 대한 기대값 $3y_1 - y_2$ 보다도 더 크고, 즉,
$$\mu \geq 3y_1 - y_2$$
- 행순이의 순수전략 2행에 대한 기대값 $2y_1 + 4y_2 + y_3$ 보다도 더 크고, 즉,
$$\mu \geq 2y_1 + 4y_2 + y_3$$
- 행순이의 순수전략 3행에 대한 기대값 $y_1 + 2y_2 + 3y_3$ 보다도 더 크고, 즉,
$$\mu \geq y_1 + 2y_2 + 3x_3$$

일 것인데, 열식이는 이 값이 가장 작아지도록 하고 싶을 것이다. 그래서 이 게임을 할 때, 열식이에게 주어진 문제는 제약조건이

$$\begin{aligned} \mu &\geq 3y_1 - y_2, \\ \mu &\geq 2y_1 + 4x_2 + y_3, \\ \mu &\geq y_1 + 2y_2 + 3y_3, \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1, \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

일 때, 목적함수 μ 가 최소가 되도록 전략을 짜는 것이다. 이 최소값 문제는 표준형 문제가 아니다. 변수 μ 의 부호에 대한 제약이 없으며, 등식제약조건 $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ 이 있다.

이와 같이 생각하면, 이 게임을 할 때, 행순이에게 주어진 문제는 제약조건이

$$\begin{aligned}
&\lambda \le 3x_1 + 2x_2 + x_3\\
&\lambda \le -x_1 + 4x_2 + 2x_3,\\
&\lambda \le x_2 + 3x_3,\\
&\ x_1 + x_2 + x_3 = 1,\\
&\ x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

일 때, 목적함수 λ 가 최대가 되도록 전략을 짜는 것이다. 이 최대값 문제 역시 표준형 문제가 아니지만, 앞에서 살펴 보았듯이 열식이의 최소값 문제에 대한 쌍대문제이다.

다음 표에서 왼쪽은 열식이의 표이고 오른쪽은 행순이의 표인데

	s_1	s_2	s_3	s_4	
y_1	-3	-2	-1	1	0
y_2	1	-4	-2	1	0
y_3	0	-1	-3	1	0
μ	1	1	1	0	1
1	0	0	0	-1	0

	x_1	x_2	x_3	λ	-1
$-u_1$	-3	-2	-1	1	0
$-u_2$	1	-4	-2	1	0
$-u_3$	0	-1	-3	1	0
$-u_4$	1	1	1	0	1
	0	0	0	-1	0

이들을 합체하면 다음 표를 얻는다:

	x_1	x_2	x_3	λ	-1
y_1	-3	-2	-1	1	0
y_2	1	-4	-2	1	0
y_3	0	-1	-3	1	0
μ	1	1	1	0	1
1	0	0	0	-1	0

이제, 앞절에서 살펴본대로 풀면, 열식이와 행순이의 최선의 전략을 구할 수 있다. 그런데, 앞의 열식이와 행순이의 풀이과정을 살펴보면, 이 합체한 표를 풀 때에는 두 과정

- 등식으로 주어진 제약조건을 처리하는 과정

- 부호에 대한 제약이 없는 변수를 처리과는 과정

이 동시상영됨을 알 수 있을 것이다.

14.4 2인 제로섬 게임의 또다른 풀이

이제 2인 제로섬 게임의 풀이 방법을 다음과 같이 정리할 수 있다:

게임 행렬이

$$A = [a_{ij}], i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m$$

인 게임에 대하여 행순이가 최적전략을 찾는 것은 다음과 같은 선형계획법 문제가 된다.

- 최대값을 구하고자 하는 목적함수는 λ
- 제약조건은

$$\lambda - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, m$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

같은 게임에 대하여 열식이가 찾고자 하는 최선의 전략은 다음과 같은 선형계획법 문제가 된다:

- 최소값을 구하고자 하는 목적함수는 μ
- 제약조건은

$$\mu - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, n$$
$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

이 문제는 행순이의 문제의 쌍대문제이다.

이제 앞에서와 마찬가지로 행순이와 열식이 각각의 최선의 전략을 하나의 표를 이용하여 풀 수 있다. 그러나 표에 나타나는 것은 주어진 게임 행렬 A 의 전치행렬의 부호를 바꾼 $-A^T$ 임에 주의하여라:

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	λ	
y_1	$-a_{11}$	$-a_{21}$	$\cdots$	$-a_{n1}$	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	$-a_{1m}$	$-a_{2m}$	$\cdots$	$-a_{nm}$	1	0
μ	1	1	$\cdots$	1	0	1
	0	0	$\cdots$	1	-1	0

보기 14.4. 지불행렬이 다음과 같은 게임을 풀어 보자.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

심플렉스 표는 다음과 같다:

	x_1	x_2	x_3	λ	
y_1	-1	-2	1	1	0
y_2	-4	1	-1	1	0
y_3	0	-3	0	$\boxed{1}$	0
y_4	1	-1	-3	1	0
μ	1	1	1	0	1
	0	*0*	0	-1	*0*

Pivot 을 하여 λ 와 μ 를 바꾸고 싶지만 이때는 *pivot* 의 중심이 0 이므로 불가능하다[2]. 그래서 두번 *pivot* 을 하여 이 일을 하려고 한다. 즉, *pivot* 을 한번 하여 μ 를 위쪽으로 옮기고 다시 *pivot* 을 하여 λ 를 왼쪽으로 옮긴다. 이를 위하여 먼저 y_3 와 λ 를 서로 바꾸고 λ 가 있는 열을 없앤다. 그 다음에 x_3 와 μ 를 마주 바꾸고 μ 가 있는 행을 없앤다.

2) 게임을 풀 때는 항상 이런 경우가 발생한다. 왜일까?

	x_1	x_2	x_3	y_3	
y_1	-1	1	1	-1	0
y_2	-4	4	-1	-1	0
y_4	1	2	-3	-1	0
μ	1	1	$\boxed{1}$	0	1
	0	-3	0	1	0

$\Rightarrow$

	x_1	x_2	y_3	
y_1	-2	0	-1	-1
y_2	-3	5	-1	1
y_4	4	5	-1	3
x_3	1	1	0	1
	0	-3	1	0

이제 표준형 문제를 풀 때와 마찬가지로 심플렉스 방법을 사용하면 다음과 같은 표를 얻는다.

	y_4	y_2	y_1	
y_3				$\frac{3}{7}$
x_2				$\frac{16}{35}$
x_1				$\frac{2}{7}$
x_3				$\frac{9}{35}$
	$\frac{13}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{14}{35}$	$\frac{33}{35}$

그러므로 이 게임의 가치는 $\frac{33}{35}$ 이다. 또, 행순이의 최선의 전략은 $\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{16}{35} & \frac{9}{35} \end{bmatrix}$ 이고 열식이의 최선의 전략은 $\begin{bmatrix} \frac{14}{35} & \frac{8}{35} & 0 & \frac{13}{35} \end{bmatrix}$ 이다.

연습문제

1. 다음 문제를 표준형 문제로 바꾸어라.

   a) 제약조건은

$$
\begin{aligned}
-2y_3 + 3y_4 &\leq 3, \\
y_1 + y_2 + 4y_3 - y_4 &= 4, \\
y_1 - 5y_3 - y_4 &\geq -5, \\
y_1, y_3, y_4 \geq 0, \ -\infty < y_2 &< \infty
\end{aligned}
$$

이고 최소값을 구하려는 목적함수는

$$-y_2 + 3y_3 - 2y_4.$$

b) 제약조건은

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 + 3x_4 &\leq 3, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 &= 4, \\ -x_1 + 5x_3 + x_4 &\leq 5, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

이고 최대값을 구하려는 목적함수는

$$4x_2 - 2x_4.$$

2. 다음 문제의 쌍대문제를 구하여라.

a) 제약조건은

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + y_2 &\geq 2, \\ y_1 - y_2 - y_3 &= 1, \\ -\infty < y_1 < \infty,\ & y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

이고 최소값을 구하는 목적함수는

$$2y_1 + 3y_2 + y_3.$$

b) 제약조건은

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2, \\ 2x_1 - x_2 &\leq 3, \\ x_1 - x_2 &\leq 1, \\ x_1 \geq 0, &\quad -\infty < x_2 < \infty \end{aligned}$$

이고, 최대값을 구하는 목적함수는

$$ax_1 + bx_2.$$

3. 위의 1번 문제에서의 최소값과 최대값을 구하여라.
4. 보기 14.1 문제의 최적값을 구하여라.
5. 앞 단원의 연습문제 3번에 있는 게임을 이 단원의 방법으로 다시 풀어라.
6. 맨 앞의 1장의 연습문제 중에서 Mora 라는 게임에 대한 것이 있다. 그 게임 들에 대한 행순이와 열식이의 최선의 혼합전략과 이 게임의 가치를 구하여라.

연습문제 풀이

4-4 $(\frac{4}{7}, 0, \frac{3}{7}), (\frac{5}{14}, \frac{9}{14}, 0)$.

7-10 $f(2,0,4) = 36$.

10-2 294.

10-6

$$\begin{aligned}\min(300y_1{+}100y_2 + 400y_3),\\ 10y_1 + 20y_2 + 8y_3 \geq 100,\\ 5y_1 + 10y_2 + 18y_3 \geq 200,\\ 7y_1 + 14y_2 + 12y_3 \geq 70,\\ y_1, y_2, y_3 \geq 0.\end{aligned}$$

12-1 $x_1 = 8, x_2 = 0, u_1 = 4, u_2 = 0, max = 320$

12-2 $max = 294$.

12-3 $(1, 1, 1/2, 0)$ 최대값 $13/2$.

12-4 $u_1 = 14, u_2 = 28, u_3 = 30, \max = 13$

12-7

$$\begin{aligned} \max(210x_2 + 14x_2 + 5x_3{+}320x_4), \\ 50x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 30x_4 \le 500, \\ 20x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 10x_4 \le 100, \\ x_3 \le 3, \\ x_4 \ge 4, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

13-1 $(y_1, y_2, y_3) = (14, 0, 10), (x_1, x_2, x_3) = (18, 0, 0)$, 최적값 52

13-3-a $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{7} \\ 0 \\ \frac{5}{7} \end{bmatrix}, valua = \frac{6}{7}.$

13-3-b $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{19} \\ \frac{6}{19} \\ \frac{4}{19} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, value = 1$

13-3-c $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}, value = \frac{1}{5}$

13-3-d $(0, 0, 5/6, 1/6, 0)$.

13-3-e $(1/2, 1/2, 0), (5/8, 3/8)$.

14-2 답: $a + 2, b = 1$ 이면, 위의 두 문제는 서로 쌍대문제이다.

14-6 행순, 열식 모두 $(0, 3/5, 2/5, 0)$., 가치=0. 행순, 열식 모두 $(0, 0, 5/12, 0, 1/3, 0, 1/4, 0, 0)$.

참고문헌

1. D. Gale, The Theory of Linear Economic Model, The University of Chicago Press, Chicago, 1989.

2. E. Mendelson, Introducing Game Theory and Its Application, Chapman Hall/CRC, Boca Raton, 2004.

3. G. Strang, Linear Algebra and Its Application, Brooks/Cole, Toronto, 1988.